

文章编号 1000-5013(2006)04-0381-03

静水压力下无铰圆拱稳定的截面优化设计

彭兴黔 曾志兴

(华侨大学土木工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要 采用泛函极值分析方法, 推导出圆拱截面函数和挠曲函数的稳定方程, 并用瑞利-里兹法, 近似求解静水压力作用下, 无铰圆拱呈反对称屈曲和正对称屈曲状态的临界荷载及截面的优化形式. 优化结构较好地体现出工程设计经济性要求, 所采用的分析方法适用于各种边界条件、各类截面形式和任意荷载作用的圆拱稳定问题.

关键词 圆拱, 稳定, 优化设计, 临界荷载

中图分类号 TU 33.04; TU 311.4 **文献标识码** A

圆拱是一种被广泛应用于土木工程中的建筑结构, 其受力和稳定计算一直是工程设计所关注的主要问题. 对受压构件的截面优化设计, 主要限于直杆^[1~4], 而对圆拱的设计, 又仅限于等截面圆拱的稳定分析方面^[5~7]. 本文所作的圆拱稳定截面优化设计, 能较好地体现出工程设计经济性要求, 可供有关的工程设计参考.

1 问题的提出

图 1 为无铰圆拱受静水压力作用的示意图. 考虑圆拱为矩形截面, 其圆拱长度 $l = 2\alpha R$, 材料弹性模量 E , 圆拱体积 V 和圆拱的截面宽度 b 均为常量, 而截面高度 h 为变量. 试确定 h 的函数形式, 使圆拱所承受的临界荷载 q_{cr} 达到最大值. 即在 l, E, b, q 为常量时, 确定 h 的函数形式, 使圆拱所用的材料 V 最少. 忽略圆拱轴向变形的影响, 即 $u' = w$, 此优化问题可用数学积分式^[4]表示为

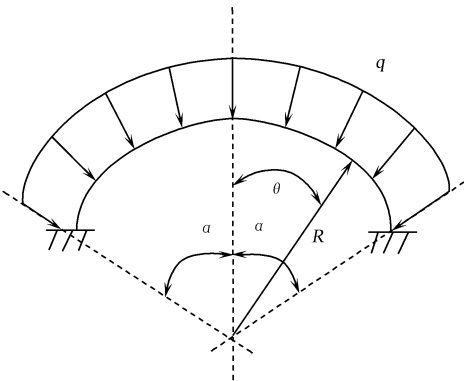


图 1 受静水压力作用的无铰圆拱

$$\left. \begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{Ebh^3}{12R^3} (u''' + u')^2 - 2qRu' - q(u''^2 + uu'') \right] d\theta \\ V = & \int_{-\alpha}^{\alpha} bhR d\theta \quad u(-\alpha) = u(\alpha) = 0, \\ u'(-\alpha) = w(-\alpha) = & u'(\alpha) = w(\alpha) = 0, \quad \varphi(\alpha) = \varphi(-\alpha) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

在式(1)中, Π 为圆拱的总势能, u 为圆拱的轴向位移, w 为圆拱的径向位移, 而 φ 为圆拱横截面的转角, $\varphi = (u + u'')/R$. 由式(1)可知, 此优化问题为带定积分约束条件的泛函极值问题, 应用拉格朗日乘子法, 可将条件极值问题方便地化为无条件极值问题^[8]. 因此, 构造一个新泛函为

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} F d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{Ebh^3}{12R^3} (u''' + u')^2 - 2qRu' - q(u''^2 + uu'') - 2\lambda hR \right] d\theta \quad (2)$$

上式中, λ 为拉格朗日乘子. 新泛函驻值条件为 $\frac{d^3}{d\theta^3} \left(\frac{\partial F}{\partial u'''} \right) - \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) + \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) = 0, \frac{\partial F}{\partial h} = 0$. 将 F 代入式中作求导运算, 整理可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\theta^3} \left[\frac{Ebh^3}{12R^3} (u''' + u') + qu' \right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left[\frac{Ebh^3}{12R^3} (u''' + u') + qu' \right] &= 0, \\ \frac{Eh^2}{4R^3} (u''' + u')^2 - 2\mathcal{R} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)即为圆拱截面优化设计的稳定控制方程, 再加上相应的边界条件, 即成为定解问题. 注意无铰拱的边界条件, 式(3)的第 1 式化简, 其优化问题的数学微分表达式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{Ebh^3}{12R^3} (u''' + u') + qu' &= C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + C_3, \quad h^2 (u''' + u')^2 - 8\mathcal{R}^4/E = 0, \\ u(-\alpha) = u(\alpha) &= 0, \quad u'(-\alpha) = w(-\alpha) = u'(\alpha) = w(\alpha) = 0, \\ u'''(-\alpha) = w'''(-\alpha) &= u'''(\alpha) = w'''(\alpha) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则式(4)与式(1)为等价的数学表示.

2 圆拱优化设计的近似计算

式(4)的数学分析很复杂, 不能求出圆拱屈曲的挠曲函数和截面函数的解析解, 可采用数值方法计算式(4)的定解问题. 但较为简便的方法是对式(1)进行泛函分析直接计算. 式(1)的总势能积分式中有两个未知函数——挠曲函数和截面函数. 记 $\frac{Ebh^3}{12R^3} (u' + u''') = -qu' + C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + C_3 = -M$, 则有

$$h^2 = -\frac{6}{b} \sqrt{\frac{1}{2\lambda E}} \cdot M. \text{ 注意圆拱截面高度不能为负数, 只取正的开方值.}$$

2.1 圆拱反对称屈曲的优化设计

假定, 当 $-\alpha \leq \theta \leq 0$ 时, $M = -a^2 \sin^2(\pi\theta/2\alpha)$; 而当 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 时, $M = a^2 \sin^2(\pi\theta/2\alpha)$. 在 $\theta = 0$ 处有反弯点, $M = 0$; $\theta = \pm\alpha$ 处, $M \neq 0$; 满足应力边界条件, 则有 $h = k |\sin^2 \frac{\pi}{2\alpha} \theta|$. 由式(1)中第 2 式, 可得 $V = \int_{-\alpha}^{\alpha} bRh \, \mathrm{d}\theta = 2 \int_0^{\alpha} bRk \sin(\frac{\pi}{2\alpha} \theta) \, \mathrm{d}\theta = 4bR\alpha k/\pi$. 设满足固支边界条件的反对称失稳位移模式为 $u = \sum A_i [\cos \frac{\pi}{2\alpha} \theta + \frac{1}{(4i-1)} \cos \frac{(4i-1)\pi}{2\alpha} \theta]$, 取其中一部分, 则 $u = A (\cos \frac{\pi}{2\alpha} \theta + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2\alpha} \theta)$. 其中, A 为任意实数. 将上式和圆拱截面高度表达式代入式(1), 求一阶变分, 得

$$q_{\alpha} = \frac{E\pi^2 V^3}{90\,720R^6 b^2 \alpha (5\pi^2 - 4\alpha^2)} [504(\frac{\pi^2}{4\alpha^2} - 1)^2 - 432(\frac{\pi^2}{4\alpha^2} - 1)(\frac{9\pi^2}{4\alpha^2} - 1) + 312(\frac{9\pi^2}{4\alpha^2} - 1)^2]. \quad (5)$$

反对称屈曲优化截面圆拱临界荷载($q'_{\alpha,v}$)与同体积等截面圆拱临界荷载($q''_{\alpha,v}$)及比值(σ), 如表 1 所示. 荷载近似值 $q_{cr} = R^3/EI$.

表 1 固支圆拱反对称屈曲临界荷载近似值

θ	0.8	1.0	1.2	1.4	$\pi/2$	1.8	2.0	2.2
$q'_{\alpha,v}$	45.263	29.469	20.943	15.866	13.034	10.530	9.134	8.256
$q''_{\alpha,v}$	31.248	19.911	13.661	10.082	8.000	6.110	4.995	4.210
σ	1.448 5	1.480 0	1.533 0	1.573 7	1.629 3	1.723 4	1.828 6	1.961

2.2 圆拱正对称屈曲的优化设计

假定, $M = -\alpha^2 \cos^2 \pi \theta/\alpha$, $\theta = 0$ 处无反弯点, $M \neq 0$; $\theta = \pm\alpha$ 处, $M \neq 0$. 满足应力边界条件, 则有

$$h = k |\cos(\pi \theta/\alpha)|. \quad (6)$$

由式(1)可得

$$V = \int_{-\alpha}^{\alpha} bRh \, \mathrm{d}\theta = 4 \int_0^{\alpha/2} bRk \cos(\pi \theta/\alpha) \, \mathrm{d}\theta = 4bR\alpha k/\pi. \quad (7)$$

设满足固支边界条件的正对称失稳位移模式为 $u = \sum A_i [\sin(\frac{\pi}{\alpha} \theta) + \frac{1}{2i} \sin(\frac{2i\pi}{\alpha} \theta)]$, 取其一项有

$$u = A [\sin(\frac{\pi}{\alpha} \theta) + \frac{1}{2} \sin(\frac{2\pi}{\alpha} \theta)]. \quad (8)$$

上式中, A 为任意实数. 将式(8), 式(6)代入式(1), 求一阶变分, 可得

$$q^{\sigma} = \frac{E\pi^2 V^3}{20\,160R^6 b^2 \alpha(5\pi^2 - 2\alpha^2)} [56(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1)^2 + 38(\frac{4\pi^2}{\alpha^2} - 1)^2], \tag{9}$$

正对称屈曲优化截面圆拱临界荷载($q'_{cr,p}$)与同体积等截面圆拱临界荷载^[5]($q''_{cr,p}$)及比值(σ), 如表 2 所示. 荷载近似值 $q_{cr}R^3/EI$.

表 2 固支圆拱正对称屈曲临界荷载近似值

θ	0. 8	1. 0	1. 2	1. 4	$\pi/2$	1. 8	2. 0	2. 2
$q'_{cr,p}$	94. 857	60. 220	41. 413	30. 083	23. 640	17. 719	14. 140	11. 508
$q''_{cr,p}$	51. 802	32. 932	22. 686	16. 512	13. 000	9. 771	7. 819	6. 381
σ	1. 831 1	1. 828 6	1. 825 5	1. 821 9	1. 818 5	1. 813 4	1. 808 4	1. 803 5

3 结果与讨论

本文无铰圆拱的截面优化设计, 采用泛函极值分析, 直接应用瑞利里兹法, 可近似计算出相应的临界荷载, 为优化设计提出了一个新方法. 本文的分析可适用于各种边界约束、各类截面形状和任意荷载分布的圆拱. 在相同材料的用量下, 截面优化圆拱较等截面圆拱的临界荷载大得多, 在工程设计中具有较强的经济性, 表明截面优化设计具有较高的理论性和实用性.

上述分析从实际角度来看, 存在一个问题, 这就是优化圆拱高度有的截面出现. 即此处截面面积为零, 在实际工程中是不可能的. 究其原因, 在稳定的分析中, 材料被考虑无限弹性体. 事实上, 在截面面积小于某定值时, 因轴向压力作用, 材料就已进入了塑性状态, 不满足材料为线弹性的假设. 故在优化圆拱设计中, 应在处附近适当加大截面, 以满足理论假设和实际要求, 截面高度的加大, 以该截面压应力达到材料比例极限为宜.

参 考 文 献

1 Keller J B. The shape of the strongest column, archive for rational[J]. Mechanics and Analysis, 1960, 26(5): 275~285

2 Tadjbakhsh I, Keller J B. Strongest column and isoperimetric inequalities for eigenvalue[J]. Journal of Applied Mechanics, 1962, 29(1) : 159~ 164

3 Olhoff N, Rasmussen S H. On single and bimodal optimum buckling loads of clamped column[J]. International Journal of Solids and Structures, 1977, 13(7) : 605~ 614

4 彭兴黔. 两端弹性铰支约束下压杆稳定的优化设计[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2002, 23(1) : 45~ 49

5 潘 岳, 刘瑞昌. 静水压力作用下圆拱正对称失稳临界力的求解[J]. 岩土力学, 1999, 20(1) : 39~ 43

6 戚云松, 潘 岳. 垂直分布荷载作用下固支圆拱的对称失稳临界力[J]. 力学与实践, 2003, 25(5) : 34~ 36

7 彭兴黔, 郭子雄. 圆拱稳定的变分分析[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2003, 24(3) : 271~ 274

8 王连祥, 方德植, 张鸣镛, 等. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1977. 965~ 967

Optimal Section Design of Stability for the Circular Hingeless Arch
with Fixed Supports under Hydraulic Pressure

Peng Xingqian Zeng Zhixing

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract The stability equations of circular arch are obtained by the method of functional extremum. The critical load of the circular hingeless arch with fixed supports under hydraulic pressure, and the optimal section are solved approximately by Rayleigh-Ritz method. The optimal structure properly meets the economical requirements in the engineering design. This method is applicable to the stability problems of the circular arch for various boundary conditions, cross section types and loads.

Keywords circular arch, stability, optimal design, critical load