

# 一种考虑强化效应的梁塑性极限分析

杨 钊

(华侨大学土木工程学院, 福建 泉州 362021)

**摘要** 应用传统的极限分析理论, 提出一种改进的刚性-非线性强化近似模型. 它较现有的几种刚塑性简化模型更符合实际, 因而更合理. 在梁的极限分析中采用新的刚塑性模型, 推导出极限弯矩公式. 文中以矩形截面梁为例, 对所得结果与传统公式进行比较, 结果表明传统公式可视为文中结果的一个特例. 最后, 给出便于工程应用的简化公式. 文中所提出的刚塑性简化模型也可用于刚架、薄板等结构的极限分析.

**关键词** 强化效应, 塑性极限, 梁, 刚塑性, 极限弯矩

**中图分类号** TU 323.3<sup>+</sup> 01; TU 313.3

**文献标识码** A

塑性铰和塑性铰线的概念在梁、板、壳的极限分析中有广泛的应用, 它使分析和计算变得简单而清晰. 正因为如此, 在大型弹塑性分析程序出现之后, 它仍然未失去意义<sup>[1~4]</sup>. 但是, 作为极限分析基础的极限弯矩的计算公式是基于理想塑性模型导出的, 由于未计及强化效应, 不免显得粗略. 本文在提出一种计及非线性强化的刚塑性模型的基础上, 导出一个改进的极限弯矩计算公式.

## 1 一种计及非线性强化的刚塑性模型

在传统的极限分析理论中, 材料的应力-应变关系可采用刚塑性模型, 即认为材料达到塑性前的弹性变形极小, 可视作刚性. 进入塑性状态后, 通常采用理想塑性或线性强化模型, 即应力-应变关系( $\sigma \sim \varepsilon$  曲线). 实际上, 材料进入塑性状态后, 常呈现非线性强化, 故也有用幂次函数来描述强化效应的, 但它往往与真实  $\sigma \sim \varepsilon$  曲线相差较大. 用某一非线性曲线来近似地拟合强化曲线可以有多种选择, 但任一种近似模型均应符合以下 3 个条件才是合适的. (1) 必须满足材料稳定性准则, 表现在  $\sigma \sim \varepsilon$  曲线上, 应满足材料基本不等式  $d\sigma/d\varepsilon \geq 0$ . (2) 应与材料的真实  $\sigma \sim \varepsilon$  曲线比较接近. (3) 数学形式应比较简单, 便于工程应用.

本文提出一种新的刚性-非线性强化模型, 如图 1 所示. 其中, 强化效应部分用一段椭圆曲线拟合, 并使在应力达最大值  $\sigma_b$  时有零斜率(即  $d\sigma/d\varepsilon = 0$ ). 即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = 0, \quad \sigma &\leq \sigma_s \\ \sigma &= \sigma_s \left[ A + B \sqrt{C - (1 - \omega/\omega_b)^2} \right], \quad \sigma_s \leq \sigma \leq \sigma_b \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

在式(1)中, 常数  $A, B, C$  由下列拟合条件控制, 当  $\varepsilon = 0$  时,  $\sigma = \sigma_s$ ,  $d\sigma/d\varepsilon = E$ ; 当  $\varepsilon = \varepsilon_b$  时,  $\sigma = \sigma_b$ ,  $d\sigma/d\varepsilon = 0$  (已满足).  $\sigma_s, \sigma_b, E$  分别为材料的屈服极限或名义屈服极限( $\sigma_{0.2}$ )、强度极限和杨氏模量. 将上式代入式(1)可得

$$A + B \sqrt{C - 1} = 1, \quad \frac{\sigma_b B}{\sigma_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{C - 1}} = E, \quad A + B \sqrt{C} = \frac{\sigma_b}{\sigma_s}. \quad (2)$$

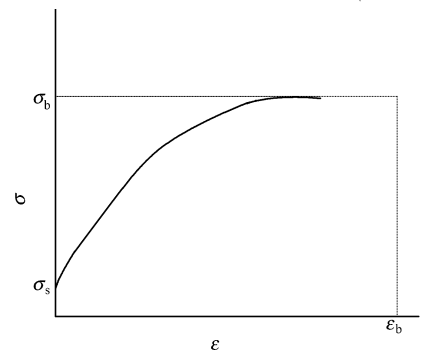


图 1 刚性-非线性强化模型

收稿日期 2005-10-09

**作者简介** 杨 钊(1965-), 男, 现为泉州市房管局(福建 泉州 362000)工程师, 主要从事土木建筑设计和工程管理的研究. E-mail: yangzhao20058@yahoo.com.cn

引入无量纲量  $\alpha = \sigma_b / \sigma_s$ ,  $\beta = \alpha_s / E \varepsilon$ , 则式(2)变换为

$$A + B \sqrt{C - 1} = 1, \quad \sqrt{C - 1} = \beta B, \quad A + B \sqrt{C} = \alpha \quad (3)$$

解得  $A = 1 - \frac{\beta(\alpha - 1)^2}{1 - 2\beta(\alpha - 1)}$ ,  $B = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{1 - 2\beta(\alpha - 1)}}$ ,  $C = 1 + \frac{\beta^2(\alpha - 1)^2}{1 - 2\beta(\alpha - 1)}$ . 代入式(1)中的第2式, 使得

$$\sigma = \sigma_s \left[ 1 - \frac{\beta(\alpha - 1)^2}{1 - 2\beta(\alpha - 1)} + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{1 - 2\beta(\alpha - 1)}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2(\alpha - 1)^2}{1 - 2\beta(\alpha - 1)} - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_b}\right)^2} \right]. \quad (4)$$

容易验证, 此式在  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_b$  范围内, 满足材料基本不等式  $d\sigma/d\varepsilon \geq 0$ .

## 2 梁的极限弯矩计算公式

梁在弹性状态下变形后, 横截面绕中性轴转动并仍保持平面, 应力沿截面高度线性分布, 边缘应力最大, 中性轴处应力为零. 随着载荷增加,

危险截面将形成塑性铰. 其过程是外边缘应力最先达到  $\sigma_s$ , 并按塑性材料强化效应继续增加, 同时截面上各点应力亦由外向里逐渐增加, 直到形成塑性铰. 梁的塑性极限分析可略去弹性变形过程, 而导出塑性铰处截面的极限弯矩公式. 为此假设<sup>[5]</sup>:

(1) 在形成塑性铰的截面上, 中性层处应力达到  $\sigma_s$ , 最外缘应力达到  $\sigma_b$ , 按刚性-非线性强化模型, 应力分布大致如图 2(a) 所示.

(2) 当梁局部进入塑性状态时, 因其周围大部分材料仍处于弹性状态, 考虑到整体变形的协调性, 平面假设仍然有效. 采用刚塑性模型, 在形成塑性铰截面处, 中性层处应变为零, 最外边缘应变为  $\varepsilon_b$ , 应变分布如图 2(b) 所示. 据以上假设, 任一高度  $z$  处的应变为

$$\varepsilon = \varepsilon(z) = \frac{z}{h} \cdot \varepsilon_b \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 可得

$$\sigma = \sigma(z) = \sigma_s \left[ 1 - \frac{\beta(\alpha - 1)^2}{1 - 2\beta(\alpha - 1)} + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{1 - 2\beta(\alpha - 1)}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2(\alpha - 1)^2}{1 - 2\beta(\alpha - 1)} - \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2} \right]. \quad (6)$$

为简化, 记  $k = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{1 - 2\beta(\alpha - 1)}}$ , 则式(6)可写为

$$\sigma = \sigma(z) = \sigma_s \left[ 1 - \beta k^2 + k \sqrt{\beta^2 k^2 - \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2} \right] = \sigma_s \left[ 1 - \beta k^2 + k \sqrt{\left(\frac{z}{h}\right)^2 + 2\frac{z}{h} + \beta^2 k^2} \right]. \quad (7)$$

极限弯矩  $M_P$  可由下列积分求得

$$M_P = \int_A \sigma(z) z dA. \quad (8)$$

给出梁的横截面形状后, 便可通过上式进行计算, 求得梁的极限弯矩  $M_P$ .

## 3 矩形截面梁的极限弯矩公式

若梁的横截面是宽为  $b$ , 高为  $2h$  的矩形, 则式(8)变换为

$$M_P = 2b \int_0^h \sigma(z) z dz. \quad (9)$$

将式(7)代入式(9), 可得

$$M_P = 2b\sigma_s \int_0^h [1 - \beta k^2 + k \sqrt{(\frac{z}{h})^2 + 2\frac{z}{h} + \beta^2 k^2}] z dz = bh^2 \sigma_s \{ (1 - \beta k^2) + 2k [\frac{\beta^3 k^3 - (1 + \beta^2 k^2)^{3/2}}{3} + \frac{\beta k}{2} + \frac{1 + \beta^2 k^2}{2} \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 k^2}}] \}. \quad (10)$$

通常  $\alpha$  与 1 是同量级, 对于大部分塑性良好的材料, 均有  $\beta \ll 1$ , 则  $\beta^2 k^2 \ll 1$ . 于是, 式(10)可简化为

$$M_P = bh^2 \sigma_s [1 - \beta k^2 + k(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})] = bh^2 \sigma_s [1 - \frac{\beta(\alpha - 1)^2}{1 - 2\beta(\alpha - 1)} + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{1 - 2\beta(\alpha - 1)}}(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})]. \quad (11)$$

此即为矩形截面梁的极限弯矩公式.

## 4 结论

(1) 对于理想塑性情况, 有  $\alpha = \alpha_s$ , 即  $\alpha = 1$ , 则得  $M_P = bh^2 \alpha$ . 这是传统理论中无强化效应时的极限弯矩, 可见传统理论的公式只是本文的一个特例. (2) 对于大量的塑性材料有  $\beta \ll 1$ , 如不少金属材料就属此类型. 这时, 对式(11)可作进一步简化而仍有足够精度, 即

$$M_P = bh^2 \sigma_s [1 + (\alpha - 1)(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})] = bh^2 \sigma_s [1 + (\frac{\alpha}{\alpha_s} - 1)(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})] \approx bh^2 [\sigma_s + 0.904(\alpha_s - \alpha_s)]. \quad (12)$$

这是一个便于工程应用的简化公式. 本文所提出的非线性强化模型也可用于刚架、薄板等结构的极限分析.

## 参 考 文 献

- 1 王 仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论[M]. 修订版. 北京: 北京大学出版社, 1992. 1~ 258
- 2 徐秉业, 刘信声. 结构塑性极限分析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985. 1~ 372
- 3 熊祝华. 塑性力学基础知识[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986. 1~ 164
- 4 Martin J B. Plasticity: Fundamentals and general results[M]. Cambridge: MIT Press, 1975. 1~ 100
- 5 Johnson W, Mellor P B. Engineering plasticity[M]. England: Ellis Horwood Limited, 1986. 55~ 198

# Plastic Limit Analysis of Beams Considering Hardening Effect

Yang Zhao

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

**Abstract** Based on the traditional plastic limit analysis, an improved rigid nonlinear Hardening approximate model is established. The improved model simulates the practical beam more accurately than current rigid plastic simplified models, hence is more reasonable. Using the improved model, an ultimate bending moment formula is presented. Comparing with the traditional formula, the results of the rectangle beam indicates: the traditional formula is only a special case of the improved model. The simplified formula of the improved model is also given for the engineering convenience. The improved model can also be used to analyze the frame and thin plate structures, etc.

**Keywords** hardening effect, plastic limit analysis, beam, rigid plasticity, ultimate bending moment