第 27 卷 第 3 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 27 No. 3
2006 年 7 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul. 2006

文章编号 1000-5013(2006)03-0241-03

# 非线性 Pochhammer-Chree 方程的多辛算法

黄 浪 扬

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 考虑非线性 Pochhammer-Chree 方程的多辛结构, 通过辛离散多辛结构得到原偏微分方程的多辛算法. 孤立波的数值模拟试验结果表明, 所构造的多辛算法是有效的, 具有良好的长时间数值行为.

关键词 非线性 Pochhammer-Chree 方程, 多辛算法, 守恒律, 孤立波试验

中图分类号 O 241.82 文献标识码 A

近年来, Marsden 等[1]和 Bridges[2]从不同角度提出了多辛结构和多辛算法的概念, 并已成为人们研究偏微分方程数值解的热门课题. 在一定限制(如在非压缩或接近)条件下, 描述弹性杆的纵向形变波传播的模型方程可用非线性的 Pochhammer-Chree 方程(非线性 P-C 方程)表示. 即

$$u_{tt} - u_{ttxx} - u_{xx} - \frac{1}{p}(u^p)_{xx} = 0. \tag{1}$$

在式(1)中, $u(x,t)$是纵位移, $t$ 是时间, $x$ 是质点的横坐标. 该方程在离子声波方面应用较为广泛. 对非线性 P-C 方程的研究, 特别是多辛算法的研究尚未见过, 因而对非线性 P-C 方程多辛算法的研究具有重要的意义. 本文给出非线性 P-C 方程的多辛结构及其守恒律, 构造了此方程的多辛 Preissmann 格式. 同时, 通过对非线性 P-C 方程孤立波的数值模拟, 说明了多辛算法的有效性.

## 1 非线性 P-C 方程的多辛结构

由协变的 Legendre 变换, 满足周期边界条件的非线性 P-C 方程(1)可以改写为多辛 PDEs 的形式, 即

$$\boldsymbol{M}z_t + \boldsymbol{K}z_x = \nabla_z S(z), \tag{2}$$

在式(2)中, $S(z) = \frac{1}{2}(v^2 + w_x^2 - q_x^2) + \frac{1}{p(p+1)}u^{p+1}$, $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $z = [u \quad v \quad w \quad q]^{\mathrm{T}}$. 方程(2)对应的变分方程为

$$\boldsymbol{M}\mathrm{d}z_t + \boldsymbol{K}\mathrm{d}z_x = \boldsymbol{D}_{zz}S(z)\mathrm{d}z. \tag{3}$$

方程(3)直接用 d$z$ 作外积运算, 可得方程(2)的多辛守恒律为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v - \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}w) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}u) = 0. \tag{4}$$

在式(4)中, $\wedge$为外积算子. Bridges 和 Reich 称如式(2)的方程为具有多辛结构的 Hamilton 型偏微分方程组(Hamilton 型 PDEs), 其最重要的一个性质是它的多辛守恒律是完全局部的. 即式(4)是局部的守恒律, 与边界条件无关, 在局部的任意一个时空区域内, 它都成立. 因此, 与辛守恒律相比, 式(4)更深刻地刻画了系统的性质.

收稿日期 2005-12-03

作者简介 黄浪扬(1974-), 男, 讲师, 主要从事偏微分方程数值解法的研究. E-mail: hly6@163.com

基金项目 福建省自然科学基金资助项目(Z0511029)

## 2 多辛算法

多辛性是Hamilton型PDEs的一个几何性质, 因此在数值解法中自然希望离散后仍能保留这类性质. 基于这个思想, Bridges和Reich引入了多辛算法的概念, 即一种能够保持离散形式的多辛守恒律的数值格式[2,3]. Reich证明了对多辛Hamilton型PDEs在时间和空间同时应用辛Runge-Kutta方法, 可得到多辛格式[4]. 例如, 在时间和空间同时应用中点格式, 便得到一多辛格式, 它就是著名的中心Preissmann格式. 我们在时间和空间方向均用中点格式对方程(2)进行离散, 可得

$$\boldsymbol{M}\left(\frac{z_{i+1/2}^{j+1}-z_{i+1/2}^{j}}{\Delta t}\right)+\boldsymbol{K}\left(\frac{z_{i+1}^{j+1/2}-z_{i}^{j+1/2}}{\Delta x}\right)=\nabla_z \boldsymbol{S}(z_{i+1/2}^{j+1/2}). \tag{5}$$

即 $\frac{1}{\Delta t}(w_{i+1/2}^{j+1}-w_{i+1/2}^{j})-\frac{1}{\Delta t}(v_{i+1/2}^{j+1}-v_{i+1/2}^{j})-\frac{1}{\Delta x}(q_{i+1}^{j+1/2}-q_{i}^{j+1/2})=\frac{1}{p}(u_{i+1/2}^{j+1/2})^p\triangleq F_{i+1/2}^{j+1/2}$, $\frac{1}{\Delta t}(u_{i+1/2}^{j+1}-u_{i+1/2}^{j})=v_{i+1/2}^{j+1/2}$, $-\frac{1}{\Delta t}(u_{i+1/2}^{j+1}-u_{i+1/2}^{j})=(w_{i+1/2}^{j+1/2})_{x\bar{x}}$, $\frac{1}{\Delta x}(u_{i+1}^{j+1/2}-u_{i}^{j+1/2})=(q_{i+1/2}^{j+1/2})_{x\bar{x}}$. 在上面几个式子中, $u_i^j\approx u(i\Delta x, j\Delta t)$, $\Delta x$ 和 $\Delta t$ 分别是空间步长和时间步长, 而且 $u_{i+1/2}^{j+1}=\frac{1}{2}(u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1})$, $u_{i+1}^{j+1/2}=\frac{1}{2}\cdot(u_{i+1}^{j}+u_{i+1}^{j+1})$, $u_{i+1/2}^{j+1/2}=\frac{1}{4}(u_i^j+u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1}+u_{i+1}^{j})$, $(u_i^j)_{x\bar{x}}=\partial_x^2 u_i^j/\Delta x^2=(u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j)/\Delta x^2$, 等等. $\triangleq$ 是个记号, 表示前面的式子记作后面的式子.

多辛Preissmann格式(5)保持离散多辛守恒律[4], 有

$$\frac{(\mathrm{d}u_{i+1/2}^{j+1}\wedge \mathrm{d}w_{i+1/2}^{j+1}-\mathrm{d}u_{i+1/2}^{j}\wedge \mathrm{d}w_{i+1/2}^{j})-(\mathrm{d}u_{i+1/2}^{j+1}\wedge \mathrm{d}v_{i+1/2}^{j+1}-\mathrm{d}u_{i+1/2}^{j}\wedge \mathrm{d}v_{i+1/2}^{j})}{\Delta t}+$$
$$\frac{\mathrm{d}q_{i+1}^{j+1/2}\wedge \mathrm{d}u_{i+1}^{j+1/2}-\mathrm{d}q_{i}^{j+1/2}\wedge \mathrm{d}u_{i}^{j+1/2}}{\Delta x}=0. \tag{6}$$

多辛格式的计算大多是在消去中间变量的基础上实现的. 这是因为直接用方程组形式的多辛格式进行计算时, 会遇到一系列诸如边界条件如何选取等问题, 并且在实际数值计算中需要计算中间变量 $v, w, q$ 的值, 这样也就大大增加了计算量. 因此, 我们消去中间变量 $v, w, q$, 得到一个与多辛Preissmann格式等价的15点新格式

$$\frac{\partial_t^2 u_{i+1}^j+2\partial_t^2 u_i^j+\partial_t^2 u_{i-1}^j}{4\Delta t^2}-\frac{\partial_t^2 u_{i+2}^j-2\partial_t^2 u_i^j+\partial_t^2 u_{i-2}^j}{4\Delta t^2\Delta x^2}-\frac{\partial_x^2 u_i^{j+1}+2\partial_x^2 u_i^j+\partial_x^2 u_i^{j-1}}{4\Delta x^2}=$$
$$\frac{1}{4}[F_{i+1/2}^{j-1/2}+F_{i+1/2}^{j+1/2}+F_{i-1/2}^{j-1/2}+F_{i-1/2}^{j+1/2}]_{x\bar{x}},$$

即

$$\frac{\partial_t^2 u_{i+1}^j+2\partial_t^2 u_i^j+\partial_t^2 u_{i-1}^j}{4\Delta t^2}-\frac{\partial_t^2 u_{i+1}^j-2\partial_t^2 u_i^j+\partial_t^2 u_{i-2}^j}{4\Delta t^2\Delta x^2}-\frac{\partial_x^2 u_i^{j+1}+2\partial_x^2 u_i^j+\partial_x^2 u_i^{j-1}}{4\Delta x^2}=$$
$$\frac{1}{4p}[(u_{i+1/2}^{j-1/2})^p+(u_{i+1/2}^{j+1/2})^p+(u_{i-1/2}^{j-1/2})^p+(u_{i-1/2}^{j+1/2})^p]_{x\bar{x}}. \tag{7}$$

## 3 数值实验

采用本文的多辛格式(7), 对非线性P-C方程(1)的孤立波的长时间行为进行数值模拟. 方程(1)的精确孤立波解[5]为

$$u(x,t)=\left[\frac{p(p+1)(v-1)}{2}\right]^{1/(p-1)}\cdot \mathrm{sech}^{2/(p-1)}\left[\frac{p-1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{v}}(x-vt+\zeta_0)\right]. \tag{8}$$

式(8)中, $v(v>1)$为波速, $\zeta_0$ 为任意常数. 由式(8)可知, 非线性弹性杆的纵向形变波为钟状波, 且这种解当$|x|\to\infty$时, 按指数衰减. 所以, 对非线性P-C方程的差分格式, 我们只在有限区间$(X_L, X_R)$上进行数值模拟, 且对人工边界 $X_L$ 和 $X_R$ 取得足够远, 以满足周期边界条件. 由于多辛格式(7)是三层隐格式, 所以格式初始时的第1层和第2层的值均取精确值, 离散得到的非线性方程组用简单叠代方法求解. 这里只考虑非线性P-C方程(1)的多辛格式(7)中 $p=2$ 时的数值模拟情况. 在方程(1)的孤立波解

(8) 中, 取 $p = 2$, $\zeta_0 = 250$, $v = 1.01$, 且 $X_L = -400$, $X_R = 400$, 并取时间步长为 $\Delta t = 0.05$, 空间步长为 $\Delta x = 1$. 图 1 给出了多辛格式 (7) 在 $t = 500$ 时的数值模拟结果与精确解的比较, 图 2 是数值模拟孤立波

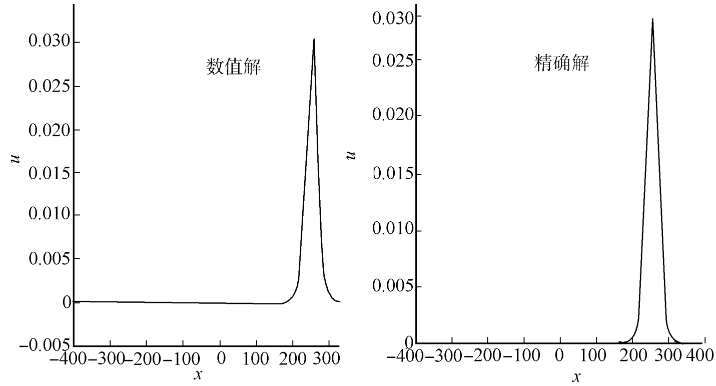


图 1　数值模拟结果与精确解的比较图

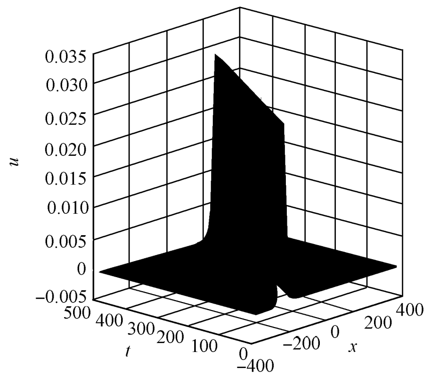


图 2　孤立波传播的模拟结果

的传播过程. 从图 1, 2 可以发现, 方程 (1) 的多辛格式 (7) 能很好地模拟孤立波的传播, 计算 10 000 步后仍保持原孤立波的波形不变. 若定义数值解 ($u_i^j$) 与精确解 ($u$) 在时间 $t = j\Delta t (j = 0, 1, \cdots)$ 的整体误差 $\sigma$ 为

$$\sigma = \max_i |u_i^j - u(i\Delta x, j\Delta t)|.$$

上式中, $i = -400, -399, \cdots, 399, 400$. 多辛格式 (7) 在不同时刻的整体误差 ($a$), 如图 3 所示. 从中可知, 在经过长时间计算后, 整体误差仍能保持在 $10^{-3}$ 的数量级内, 误差较小. 数值实验结果表明, 本文所构造的多辛格式对 P-C 方程是有效的, 适用于长时间的数值计算.

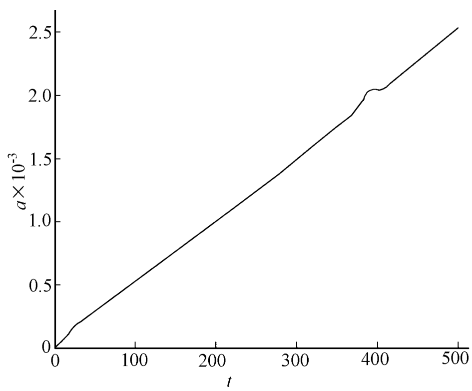


图 3　整体误差图

## 参　考　文　献


1　Marsden J E, Patrick G P, Shkoller S. Multisymplectic geometry, variational integrators and nonlinear PDEs[J]. Comm Math Phys, 1998, 199: 351～395

2　Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation[J]. Math Proc Cam Phil Soc, 1997, 121: 147～190

3　Bridges T J, Reich S. Multi-symplectic integrators: Numerical Schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity[J]. Physics Letter (A), 2001, 284(4-5): 184～193

4　Reich S. Multi-symplectic Runge-Kutta methods for Hamiltonian wave equations[J]. J Comput Phys, 2000, 157(5): 473～499

5　刘广军, 段广森. 非线性弹性杆内纵向波方程的孤立波解[J]. 河南大学学报(自然科学版), 2001, 29(3): 101～103


# Multi-Symplectic Algorithm for Nonlinear Pochhammer-Chree Equation

Huang Langyang

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

**Abstract**　The multi-symplectic structure of the nonlinear Pochhammer-Chree equation is considered. Using symplectic discretizations for the multi-symplectic structure, a multi-symplectic algorithm is obtained. The numerical experiments show that the multi-symplectic scheme constructed in this paper is effective, and has excellent long-time numerical behavior.

**Keywords**　nonlinear Pochhammer-Chree equation, multi-symplectic algorithm, conservation law, solitary wave experiment