

文章编号 1000-5013(2006)03-00238-03

解四阶抛物型方程的若干新的差分格式

金相华 曾文平

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 利用加耗散项的方法, 提出解四阶抛物型方程的若干新的差分格式, 研究它们的局部截断误差阶及稳定性. 数值例子表明, 格式是有效的.

关键词 四阶抛物型方程, 耗散项, 差分格式, 稳定性

中图分类号 O 241.82

文献标识码 A

考虑四阶抛物型方程初边值问题, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0, & 0 < x < L, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} &= u(L, t) = \frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial x^2} = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

文 [1~5] 中对四阶抛物型方程 (1) 构造了若干显式、隐式和半显式差分格式. 利用加耗散项的思想来构造偏微分方程的差分格式, 是一个重要而有效的方法. 它在方程 (1) 的右端加入耗散项 Q , 使之成为 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = Q$. 通过适当选取参数, 构造出逼近它的, 具有较高稳定性的差分格式. 本文针对方程 (1) 提出若干新的差分格式, 进一步扩充了已有的结果.

1 若干新的差分格式

设 h 和 τ 分别表示空间方向 x 和时间方向 t 的步长. 网域由求解区域上的网格点集 $\{x_j, t_n\}$ 所组成, 其中 $x_j = jh, t_n = n\tau, (j, n \text{ 为整数})$. 又设 $R = \frac{\tau}{h^4}$ 为网格比, 引入差分记号, 有

$$\begin{aligned} \delta_x^2 u_j^n &= u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n, \\ \delta_t^2 u_j^n &= u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}, \\ \delta_x^4 u_j^n &= u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n. \end{aligned}$$

当用 Fourier 方法分析差分格式稳定性时, 令 $u_j^n = \lambda^n e^{ij}$ ($i = \sqrt{-1}$), 代入三层差分格式得到误差传播矩阵的特征方程

$$A^2 + B + C = 0, \quad A > 0. \quad (2)$$

引理 即 McKee 定理^[6]. 实系数二次方程 (2) 的两根按模小于等于 1 的充要条件, 有

$$\begin{cases} A - C \geq 0, & A + B + C \geq 0, & A - B + C \geq 0, \\ e^{-ij} \delta_x^2 e^{ij} = -4s^2, & e^{-ij} \delta_x^4 e^{ij} = 16s^4. \end{cases}$$

其中, $s = \sin(\frac{\tau}{2})$. 至于初边值条件处理见文 [1], 从略.

收稿日期 2005-11-21

作者简介 金相华 (1978-), 女, 助教, 硕士, 主要从事计算数学的研究. E-mail: jinxian2387@sina.com

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目 (04QZR09)

(1) 耗散项 $Q = -\frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}$ 及其相应的差分格式. 在方程(1)中加入耗散项 $Q = -\frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}$, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4}. \quad (3)$$

由此,可构造如下相应的两层十点隐式差分格式,有

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h} + \frac{u_i^n}{h^4} = -\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h^4}, \quad (4)$$

其局部截断误差阶为 $O(h^2)$, 传播因子为 $\lambda = \frac{1 - 16(1 + \lambda)Rs^4}{1 - 16Rs^4}$, 稳定性条件为 $|\lambda| \leq 1$, 即

$$-1 + 16Rs^4 \leq 1 - 16Rs^4 - 16Rs^4 \leq 1 - 16Rs^4.$$

上述不等式右边自然成立, 当 $Rs^4 \leq \frac{1}{2}$ 时, 左边不等式恒成立. 于是有

定理 1 当 $Rs^4 \leq 1/2$ 时, 两层十点隐格式(4)恒稳定.

(2) 耗散项 $\frac{2}{h^2} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}$ 及其相应的差分格式. 在方程(1)中引入耗散项 $Q = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}$, 由此可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}, \quad (5)$$

有 2 个相应的差分格式. (A) 三层三对角型十一隐格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h} + \frac{u_i^n}{h^4} = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h^2}, \quad (6)$$

其局部截断误差阶为 $O(h^2 + (\frac{1}{h})^2)$, 相应特征方程为

$$(1 + 4Rs^2)^2 - (1 - 16Rs^4 + 8Rs^2) + 4Rs^2 = 0.$$

对照引理得

$$\begin{cases} A = 1 + 4Rs^2, \\ B = -1 + 16Rs^4 - 8Rs^2, \\ C = 4Rs^2. \end{cases}$$

当 $Rs^2 \leq 1$ 时, 对任意 $R > 0$ 均有

$$\begin{cases} A - C = 1 > 0, \\ A + B + C = 16Rs^4 > 0, \\ A - B + C = 2 + 16Rs^2(1 - s^2) > 0. \end{cases}$$

由引理可知, 其两根按模小于等于 1. 又由韦达定理可知, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{C}{A} < 1$, 故至少有一根位于单位圆内.

于是, 由稳定性理论得

定理 2 当 $Rs^2 \leq 1$ 时, 三层三对角型十一隐格式(6)恒稳定.

(B) 三层三对角型十一隐格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2} + \frac{u_i^n}{h^4} = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{h^2}, \quad (7)$$

其局部截断误差阶为 $O(h^2 + (\frac{1}{h})^2)$, 相应的特征方程为

$$(1 + 8Rs^2)^2 + (32Rs^4 - 16Rs^2) - 1 + 8Rs^2 = 0.$$

对照引理得

$$\begin{cases} A = 1 + 8Rs^2, \\ B = 32Rs^4 - 16Rs^2, \\ C = -1 + 8Rs^2. \end{cases}$$

当 $Rs^2 \leq 1$ 时, 对任意 $R > 0$ 均有

$$\begin{cases} A - C = 2 > 0, \\ A + B + C = 32Rs^4 = 0, \\ A - B + C = 32Rs^2(-s^2) = 0. \end{cases}$$

于是,由引理及韦达定理得
定理 3 当 $\lambda = 1$ 时,三层三对角型十一隐格式(7)恒稳.

2 数值例子

解四阶抛物型方程混合问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, & 0 < x < 1, & \\ u(0, t) = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = u(1, t) = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} &= 0, & t < 0. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

混合问题的精确解为 $u(x, t) = e^{-t} \sin x$. 取 $x = \frac{1}{10}, R = \frac{1}{2}, 1$, 计算到 $n = 500$, 比较精确解与格式(4) ($\lambda = -\frac{1}{2}$), 格式(6), (7) ($\lambda = 1$) 的数值解, 如表 1 所示.

表 1 精确解与数值解比较表

R	x	精确解	格式(4)	格式(6)	格式(7)	R	x	精确解	格式(4)	格式(6)	格式(7)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0.027 2	0.028 3	0.028 1	0.028 3	1	$\frac{1}{10}$	0.002 4	0.002 6	0.002 5	0.002 6
	$\frac{2}{10}$	0.051 7	0.053 8	0.053 5	0.053 8		$\frac{2}{10}$	0.004 6	0.004 9	0.004 8	0.004 9
	$\frac{3}{10}$	0.071 2	0.074 1	0.073 6	0.074 0		$\frac{3}{10}$	0.006 3	0.006 8	0.006 6	0.006 8
	$\frac{4}{10}$	0.083 7	0.087 1	0.086 5	0.087 0		$\frac{4}{10}$	0.007 4	0.008 0	0.007 8	0.007 9
	$\frac{5}{10}$	0.088 0	0.091 6	0.091 0	0.091 5		$\frac{5}{10}$	0.007 7	0.008 4	0.008 2	0.008 3

参 考 文 献

1 K. 抛物型方程网格积分法[M]. 袁兆鼎, 译. 北京: 科学出版社, 1963. 143 ~ 152
2 林鹏程. 解四阶抛物型方程的绝对稳定高精度差分格式[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1994, 33(6): 756 ~ 759
3 曾文平. 高阶抛物型方程的具有高稳定性的显式与半显式差分格式[J]. 应用数学学报, 1996, 19(4): 632 ~ 634
4 曾文平. 解四阶抛物型方程的高精度恒稳定的隐式格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(4): 331 ~ 335
5 McKee S. A generalization of the Du Fort-Frankel scheme[J]. J Inst Maths Applies, 1972, 10(1): 76 ~ 82

Several New Difference Schemes for Solving
Fourth Order Parabolic Equation

Jin Xianghua Zeng Wenping

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract In this paper, several new difference schemes for solving fourth order parabolic equation are developed by using dissipative term, and their orders of the local truncation error and stability are discussed. It is shown that schemes are effective by numerical examples.

Key words fourth order parabolic equation, dissipative term, difference scheme, stability