第 27 卷　第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 27　No. 3
2006 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2006

文章编号　1000-5013(2006)03-0231-03

D_n 型路代数本性倾斜模的个数

王　敏　雄

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要　给出 D_n 型路代数的本性倾斜模的定义, 以及其个数的计算公式. 即 $g(n)=8f(n-2)+(4n-15)f(n-3)+4\sum_{i=1}^{n-4}(n-3-i)f(i)f(n-3-i)$, $n\geqslant 5$, 其中 $f(n)$ 为 A_n 型路代数 A 的倾斜模的个数.

关键词　D_n 型路代数, AR-箭图, 倾斜模, 本性倾斜模

中图分类号　O 153.3　　　　文献标识码　A

1　基本概念

本文总约定代数 A 是代数闭域 k 上有向箭图 $\vec{\Delta}$ 的路代数 $k\vec{\Delta}$ 特别地, 当 $\vec{\Delta}$ 是 $A_n(D_n)$ 型的有向箭图, 则其路代数 $k\vec{\Delta}$ 称为 $A_n(D_n)$ 型的路代数. 文中所讨论的 D_n 型有向箭图(图 1), 其对应的 Auslander-Reiten 箭图(AR-箭图), 如图 2 所示. 记 $P(\omega)$ 为点 ω 对应的投射模. 本文的模总指有限生成右 A-模. 我们记 A 的右模范畴为 mod A. 本文不区分一个模和它的同构类, 也不区分一个不可分解 A-模与代数 A 的 AR-箭图的点. 记 τ 为 mod A 中的 Auslander-Reiten 变换(AR-变换)[1]. 若 C 为一有限集合, 则 $\# C$ 表示有限集 C 中所包含元素的个数.

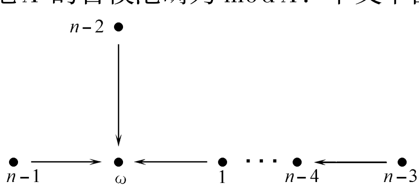

图 1　D_7 型箭图

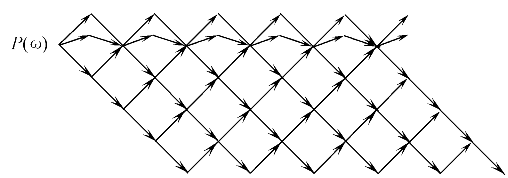

图 2　D_7 型路代数的 AR-箭图($n=7$)

定义 1[2]　设 $T_A\in$ mod A 满足如下条件: (1) pd $T_A\leqslant 1$. (2) $\mathrm{Ext}_A^1(T_A, T_A)=0$. (3) $T_A=\bigoplus_{i=1}^{n}T_i$. 这里 n 为 A 的 Grothendieck 群的秩, T_i 为不可分解模, 且 $T_i\ncong T_j$, $i\neq j$, 则称 T_A 是倾斜模.

定义 2　设 T_A 为 D_n 型路代数 $A=k\vec{\Delta}$ 的倾斜模, 若 T_A 有一个不可分解直和项在 $\vec{\Delta}$ 的三叉点 ω 对应投射模 $P(\omega)$ 的 τ 轨道上, 则称 T_A 为本性倾斜模. 记 A_n 型路代数的倾斜模个数为 $f(n)$, 则有 $f(n)=\sum_{s=0}^{n-1}f(s)f(n-1-s)$[3].

2　主要结论和证明

定理　设 A 为图 1 所示的 D_n 型有向箭图对应的路代数. 记 $g(n)$ 为其本性倾斜模的个数, 即 $g(n)=\#\{T_A\mid T_A=\tau^{j}P(\omega)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{n-1}T_i), 0\leqslant j\leqslant n-2\}$, 则

$$g(4)=8f(2)+f(1),$$

收稿日期　2005-10-11
作者简介　王敏雄(1974-), 男, 讲师, 主要从事代数表示论的研究. E-mail: mxw@hqu.edu.cn
基金项目　国务院侨务办公室科研基金资助项目(05QZR11)

$$g(n) = 8f(n-2) + (4n-15)f(n-3) + 4\sum_{i=1}^{n-4}(n-3-i)f(i)f(n-3-i), \qquad n \geqslant 5.$$

记 A_n: $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \cdots \leftarrow n-1 \leftarrow n$ 型路代数的 AR-箭图为 $\vec{\Gamma}_{A_n}$, 则 $P_{A_n}(i)$, $I_{A_n}(i)$ 分别为点 i 对应的投射模与入射模. 由 $\vec{\Gamma}_{A_n}$ 与 $\vec{\Gamma}_{A_m}(m \leqslant n-2)$ 构造出如下的箭图. 设 $\vec{\Gamma}'_{A_n}$ 为从 $\vec{\Gamma}_{A_n}$ 中去除包含 $P_{A_n}(1)$, $P_{A_n}(2)$, …, $P_{A_n}(m+1)$ 且与 $\vec{\Gamma}_{A_{m+1}}$ 同构的满子箭图. 将 $\vec{\Gamma}'_{A_n}$ 中的点 $I_{A_n}(2+i)$ 与 $\vec{\Gamma}_{A_m}$ 中的点 $P_{A_m}(i)$ 用箭 $I_{A_n}(2+i) \to P_{A_m}(i)$, $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 连接, 则所得的箭图记为 $\vec{\Gamma}(n, m)$. 当 $n=6$, $m=2$ 时, 箭图如图3所示. $\vec{\Gamma}(n, m)$ 对应的箭图范畴记为 $k\vec{\Gamma}(n, m)$, 对应的 mesh 范畴记为 $k(\vec{\Gamma}(n, m))$.

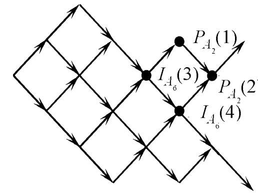

图3 $\vec{\Gamma}(6, 2)$ 图

引理1 在范畴 $\mathscr{C} = k(\vec{\Gamma}(n, m))$ 中, 若 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(T, T) = 0$, 且 $T = P_{A_n}(n) \oplus T_1$, 则 T 的不可分解直和项最多只有 n 个.

证明 对 n 用数学归纳法. 当 $n = m+2$ 时, 引理显然成立. 设在范畴 $\mathscr{C} = k(\vec{\Gamma}(k, m))$, $(m+2 \leqslant k \leqslant n-1)$ 中, 引理成立. 考虑范畴 $k(\vec{\Gamma}(n, m))$ 的情况, 记 $\vec{\Delta}_n$ 为一般 A_n 型路代数的 AR-箭图. 若 $P_{A_n}(i)$, $(m+2 \leqslant k \leqslant n-1)$ 不是 T_1 的直和项, 则 T_1 在一个与 $\vec{\Delta}_{n-1}$ 同构的箭图中, 因而 T_1 的不可分解直和项最多只有 $n-1$ 个, 结论成立. 若存在 i_0, $(m+2 \leqslant i_0 \leqslant n-1)$, 使 $P_{A_n}(i_0)$ 为 T_1 的直和项, 且 $P_{A_n}(i)$, $(i_0+1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 不是 T_1 的直和项, 则在一个与 $\vec{\Delta}_{n-i_0-1} \cup \vec{\Gamma}(i_0, m)$ 同构的非连通子箭图中. 显然, T_1 在 $\vec{\Delta}_{n-i_0-1}$ 中最多只有 $n-i_0-1$ 个不可分解直和项, 而由归纳假设 T_1 在 $\vec{\Gamma}(i_0, m)$ 中最多只有 i_0 个不可分解直和项. 这样, T_1 在与 $\vec{\Delta}_{n-i_0-1} \cup \vec{\Gamma}(i_0, m)$ 同构的非连通子箭图中, 最多只有 $n-1$ 个不可分解直和项. 证毕.

引理2 在范畴 $\mathscr{C} = k(\vec{\Gamma}(n, m))$ 中, 若 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(T, T) = 0$, 且 $T = P_{A_n}(n) \oplus T_1$, 记 $g(n, m) = \#\{T \mid T$ 有 n 个不可分解直和项$\}$, 则

$$g(m+2, m) = f(m+1),$$
$$g(m+k, m) = f(m+k-1) + \sum_{i=0}^{k-3} g(m+k-1-i, m)f(i), \qquad k \geqslant 3.$$

证明 对 T_1 中包含 $P_{A_n}(i)$, $(m+2 \leqslant i \leqslant n-1)$ 的情况分别讨论, 可知结论成立.

引理3 $g(m+k, m) = f(m+k-1) + \sum_{i=0}^{k-3} a_i f(m+k-2-i)$, $(k \geqslant 3)$. 其中, $a_0 = f(0)$, $a_s = f(s) + \sum_{i=0}^{s-1} a_i f(s-1-i)$, $(s \geqslant 1)$.

证明 对 k 用数学归纳法. 当 $k = 3$ 时, 显然, 设 $3 \leqslant k \leqslant k_0$, 结论成立. 下证 $k = k_0+1$, 结论成立.

$$\begin{aligned}
g(m+k_0+1, m) = f(m+k_0) + \sum_{j=0}^{k_0-2} g(m+k_0-j, m)f(j) = \\
f(m+k_0) + g(m+2, m)f(k_0-2) + \sum_{j=0}^{k_0-3}(f(m+k_0-j-1) + \\
\sum_{i=0}^{k_0-j-3} a_i f(m+k_0-j-2-i))f(j) = \\
f(m+k_0) + (f(m+1)f(k_0-2) + \sum_{j=0}^{k_0-3} f(m+k_0-j-1)f(j)) + \\
\sum_{j=0}^{k_0-3}\sum_{i=0}^{k_0-j-3} a_i f((m+k_0-2)-(i+j))f(j) = \\
f(m+k_0) + \sum_{j=0}^{k_0-2} f(m+k_0-j-1))f(j) + \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k_0-3} a_i f((m+k_0-2)-(i+j))f(j) = \\
f(m+k_0) + a_0 f(m+k_0-1) + \sum_{l=0}^{k_0-3}(f(l+1) + \sum_{s=0}^{l} a_s f(l-s))f(m+k_0-2-l) = \\
f(m+k_0) + \sum_{l=0}^{k_0-2} a_l f(m+k_0-1-l).
\end{aligned}$$

证毕.

推论　$g(m+k,m)=\sum_{i=0}^{k-2}f(i)f(m+k-1-i),(k\geqslant 3)$.

证明　首先用数学归纳法证明 $a_s=f(s+1)$. (1) $a_0=f(0)=f(1)$, $a_1=f(1)+a_0f(0)=f(1)f(0)+f(0)f(1)=f(2)$. (2) 设 $a_s=f(s+1),(0\leqslant s\leqslant k)$, 则 $a_{k+1}=f(k+1)+\sum_{i=0}^{k}a_if(k-i)=f(k+1)f(0)+\sum_{i=0}^{k}f(i+1)f(k-i)=\sum_{i=0}^{k+1}f(i)f(k+1-i)=f(k+2)$. 所以, $g(m+k,m)=f(m+k-1)+\sum_{i=0}^{k-3}f(i+1)f(m+k-2-i)=f(m+k-1)+\sum_{i=0}^{k-2}f(i)f(m+k-1-i)=\sum_{i=0}^{k-2}f(i)f(m+k-1-i)$

定理的证明　对集合 $\{T_A\mid T_A=\tau^{j}P(\omega)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{n-1}T_i),0\leqslant j\leqslant n-2\}$ 分情况讨论. (1) 当 $j\in\{n-3,n-2\}$ 时, 由文〔4〕的引理 6 可知, T_A 在图 4 所示的满子范畴中, 所以 $\{T_A\mid T_A=\tau^{(n-3)}P(\omega)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{n-1}T_i)\}=\{T_A\mid T_A=\tau^{(n-2)}P(\omega)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{n-1}T_i)\}=4f(n-2)$. (2) 当 $0\leqslant j\leqslant n-4$ 时, 则由引理 1 及文〔4〕的引理 6 可知, 倾斜模 $T_A=\tau^{j}P(\omega)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{n-1}T_i)$ 的不可分解直和项中有 $n-2$ 个在与 $\vec{\Gamma}(n-2,n-4-j)$ 同构的箭图中, 当 $n=4$ 时, $\#\{T_A\mid T_A=\tau^{j}P(\omega)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{n-1}T_i),0\leqslant j\leqslant n-4\}=\#\{T_A\mid T_A=P(\omega)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{3}T_i)\}=g(2,0)=f(1)$. 所以 $g(4)=8f(2)+f(1)$. 由引理 3 的推论得, 当 $n\geqslant 5$ 时, $\#\{T_A\mid T_A=\tau^{j}P(\omega)\oplus(\bigoplus_{i=1}^{n-1}T_i),0\leqslant j\leqslant n-4\}=g(n-2,n-4)+4\sum_{j=1}^{n-4}g(n-2,n-4-j)=g(n-2,n-4)+4\sum_{j=1}^{n-4}g((n-4-j)+(2+j),n-4-j)=f(n-3)+4\sum_{j=1}^{n-4}\sum_{i=0}^{j}f(i)f(n-3-i)=(4n-15)f(n-3)+4\sum_{i=1}^{n-4}(n-3-i)f(i)f(n-3-i)$. 所以, $g(n)=8f(n-2)+(4n-15)f(n-3)+4\sum_{i=1}^{n-4}(n-3-i)f(i)f(n-3-i),(n\geqslant 5)$.

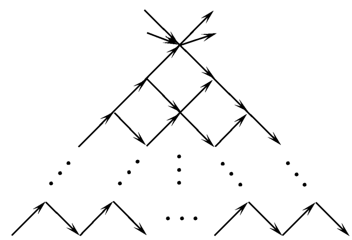

图 4　mod A 的满子范畴

3　结束语

借助于路代数的 AR 箭图并对其进行研究, 是代数表示理论研究的主要特点及重要手段. 文〔5〕对一类基本路代数的 AR-箭图的作图进行了 VB 编程. 本文通过对 D_n 型路代数的 AR-箭图进行分析研究, 得到了图 1 所示的 D_n 型路代数的本性倾斜模的个数. 当 D_n 型有向箭图 $\vec{\Delta}$ 的箭向改变时, 其本性倾斜模的个数也会发生相应的改变, 我们可以用类似的方法得到其计算公式.

参　考　文　献

1　Auslander M, Reiten I, Smal S O. Representation theory of artin alyebras[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 224~256

2　Happel D, Ringel C M. Tilted algebras[J]. Trans Amer Math Soc, 1982, 274: 399~433

3　王敏雄, 林亚南. A_n 型路代数倾斜模的个数[J]. 数学研究与评论, 2005, 25(1): 144~147

4　王敏雄, 林亚南. Dynkin 型路代数倾斜模与完全切片模[J]. 中国科学, 2004, 34(3): 315~322

5　王敏雄. A_n 型路代数的 AR-箭图作图的 VB 编程[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2004, 25(3): 215~253

The Number of Characteristic Tilting Modules Over Path Algebras of D_n

Wang Minxiong

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract　In this paper, characteristic tilting modules over path alyebras of D_n is defined It is proved that its number is $g(n)=8f(n-2)+(4n-15)f(n-3)+4\sum_{i=1}^{n-4}(n-3-i)f(i)f(n-3-i)$, $n\geqslant 5$, where $f(n)$ is the number of tilting modules over path algebras of A_n.

Keywords　path algebras of D_n, AR-quiver, tilting module, characteristic tilting modules