

各向异性磁介质中无限大载流薄板的磁场

吴丽丽 王建成 林 洁

(华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要 利用各向异性磁介质中毕奥-萨伐尔定律, 以及由此定律求出的, 在各向异性磁介质中无限长载流直导线的磁场的基础上, 进一步求出无限大载流薄板在磁各向异性介质中的任一点的磁场强度, 拓展该定律的应用范围.

关键词 磁场, 各向异性, 磁介质, 载流薄板, 无限大

中图分类号 O 441

文献标识码 A

在各向异性磁介质中, 磁矢势 A 的积分公式^[1,2]为

$$A_i(x) = \frac{1}{4\pi \sqrt{|\mu_{ij}|}} \cdot \sum_{j=1}^3 \Delta_{ij} \int \frac{j_j(x') dV'}{\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \mu_{nm}^{-1} (r_n r_m)^{1/2}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

应用此公式, 根据 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 导出在各向异性磁介质中毕奥-萨伐尔定律的笛卡儿坐标形式. 即当各向异性磁介质的 3 个主轴与笛卡儿坐标的 X, Y, Z 轴分别平行时, 可以推出各向异性磁介质中的毕奥-萨伐尔定律^[3]为

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\boldsymbol{\mu}}{4\pi} \cdot \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}})^{3/2}}. \quad (1)$$

在式(1)中, 并矢 $\boldsymbol{\mu}$ 为

$$\boldsymbol{\mu} = \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}}} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3,$$

$\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$ 均为磁导率张量矩阵的元素, 而 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 分别表示 X, Y, Z 轴方向的单位矢量, \mathbf{R} 为源点 x' 到场点 x 的矢径, 即

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' = R_1 \mathbf{e}_1 + R_2 \mathbf{e}_2 + R_3 \mathbf{e}_3. \quad (2)$$

若 I 代表电流, 当电流为线电流时, 式(2)可写成

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\boldsymbol{\mu}}{4\pi} \cdot \int \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}})^{3/2}}. \quad (3)$$

1 无限长直导线的磁场^[4]

如图 1 所示, 设无限长直导线位于 X 轴, 通有电流 I . 同时, 使各向异性磁介质的 3 个主轴分别与直角坐标系的 3 个坐标轴平行, 可求 Z 轴上距原点为 r 的 P 点的磁场强度. 在距坐标原点 l 处取电流元 $Id\mathbf{l}$, 有 $\mathbf{R} = r\mathbf{e}_3 - l\mathbf{e}_1$, 则有

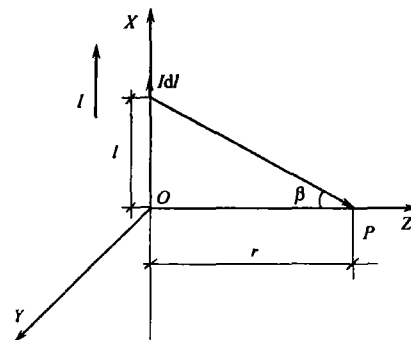


图 1 无限长载流直导线

收稿日期 2005-09-05

作者简介 吴丽丽(1982-), 女, 硕士研究生, 主要从事电路理论和微电子技术的研究; 通信作者: 王建成(1943-), 男, 教授, E-mail: wangjc@hqu.edu.cn.

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(04QZR10)

$$Idl \times R = Idle_1 \times (re_3 - xe_1) = -Irdle_2.$$

由图1可知, $l = r \tan \beta$, 则 $dl = r \sec^2 \beta d\beta$. 代入式(4)的积分部分可得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Idl \times R}{(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}})^{3/2}} &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Irdl}{(\frac{l^2}{\mu_{11}} + \frac{r^2}{\mu_{33}})^{3/2}} \cdot e_2 = \\ &- \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{Ir^2 \sec^2 \beta d\beta}{(\frac{r^2 \tan^2 \beta}{\mu_{11}} + \frac{r^2}{\mu_{33}})^{3/2}} \cdot e_2 = - \frac{\mu_{33}^{3/2} I}{r} \cdot \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sec^2 \beta d\beta}{(1 + \frac{\mu_{33}}{\mu_{11}} \tan^2 \beta)^{3/2}} e_2. \end{aligned}$$

令 $\sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}}} \cdot \tan \beta = \tan \theta$, 则有

$$\sec^2 \beta d\beta = \sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{33}}} \cdot \sec^2 \theta d\theta.$$

于是, 上式积分可化为

$$\begin{aligned} - \frac{\mu_{33}^{3/2} I}{r} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{33}}} \cdot \sec^2 \theta d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} \cdot e_2 &= - \frac{\mu_{33} \sqrt{\mu_{11}} I}{r} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^3 \theta} e_2 = \\ &- \frac{\mu_{33} \sqrt{\mu_{11}} I}{r} \cdot \sin \theta \cdot e_2 \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}, \end{aligned}$$

在上式中, $\theta = \arctan(\sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}}} \cdot \tan \beta)$, 当 $\beta_1 = -\frac{\pi}{2}$, 则 $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$, 而 $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$, 则 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, 可得积分结果为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Idl \times R}{(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}})^{3/2}} = - \frac{2\mu_{33} \sqrt{\mu_{11}} I}{r} \cdot e_2.$$

代入式(3)可得

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{4\pi} (\sqrt{\frac{\mu_{11}}{\mu_{22}\mu_{33}}} \cdot e_1 e_1 + \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{11}\mu_{33}}} \cdot e_2 e_2 + \sqrt{\frac{\mu_{33}}{\mu_{11}\mu_{22}}} \cdot e_3 e_3) \cdot \\ &(- \frac{2\mu_{33} \sqrt{\mu_{11}} I}{r} \cdot e_2) = - \frac{I}{2\pi r} \sqrt{\mu_{22}\mu_{33}} \cdot e_2. \end{aligned} \quad (4)$$

当介质为线性各向同性时, 应有 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$, μ 是磁导率. 则式(4)可化为

$$B(x) = - \frac{\mu I}{2\pi r} \cdot e_2.$$

这是通常公认的结果.

2 无限大载流薄板的磁场

如图2所示, 设无限大载流薄板置于 XOY 平面内, 通有电流 I , 其单位宽度电流为 j , 方向平行于 X 轴, 沿 X 轴的正方向, 求 Z 轴上某点 P 的磁场强度. 设 P 点距原点的为 a . 将无限大带电平面分成许多平行于 X 轴的无限长的直线状带电狭条 dy . 如图2所示, dy 通有电流 $j dy$. 应用式(4), 可得到任一带电狭条在 P 点产生的磁场 dB 的大小为

$$dB = \frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{2\pi r} j dy. \quad (5)$$

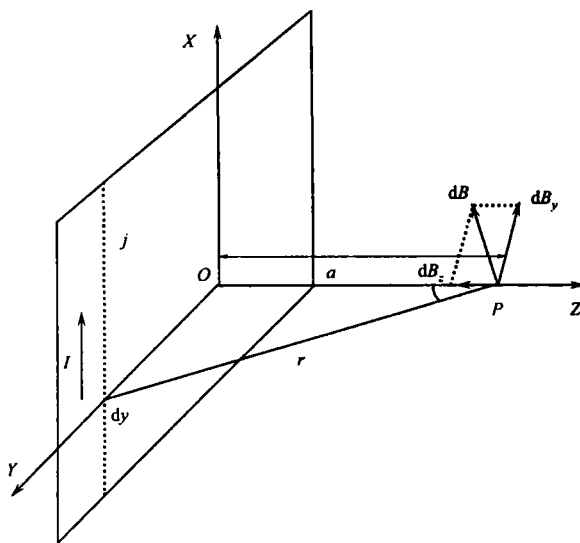


图2 无限大均匀载流平面

由于各带电狭条在 P 点产生的磁场的方向不同, 将其沿 Y 轴和 Z 轴分解为 dB_y, dB_z . 即

$$dB_y = - dB \cos \alpha,$$

$$dB_z = dB \sin \alpha.$$

由于对称性, 显然 $\int_{-\infty}^{+\infty} dB_z = 0$, 则 $\mathbf{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} dB_y$, 有

$$\mathbf{B} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dB_y \mathbf{e}_2 = - \int_{-\infty}^{+\infty} dB \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{2\pi r} j dy \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_2.$$

由几何关系可知, $\cos \alpha = \frac{a}{r}$, $r^2 = a^2 + y^2$. 代入上式得

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = & - \frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{2\pi} j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + y^2} dy \cdot \mathbf{e}_2 = - \frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{2\pi} j \cdot \arccot\left(\frac{y}{a}\right) \cdot \mathbf{e}_2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\ & - \frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{2\pi} j \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_2 = - \frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{2} j \cdot \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (6)$$

若电流沿 Y 轴流动, 则

$$\mathbf{B} = - \frac{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}{2} j \cdot \mathbf{e}_1,$$

这体现出各向异性介质对磁场的影响. 当 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ 时, 有

$$\mathbf{B} = - \frac{\mu j}{2} \cdot \mathbf{e}_2.$$

这与各向同性所得结果相同^[5], 正是我们所预料的.

3 结束语

众所周知, 所有介质都应是各向异性的, 各向同性仅是特例. 本文计算的结果再次表明了介质各向异性对磁场产生了影响. 如当介质的各向同性作为各向异性的一个特例时, 由本文导出的结果与通常把介质作为各向同性所得的结论一致, 从而说明磁场各向异性介质中毕奥-萨伐尔定律的正确性, 为进一步研究各向异性介质的磁场打下基础.

参 考 文 献

- 1 陈荣年, 陈洁. 各向异性磁介质的电感新公式[J]. 电子科学学刊, 1991, 13(2): 159~168
- 2 陈荣年, 王建成. 各向异性磁矢势 A 的微分方程及其解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(1): 90~97
- 3 陈荣年, 陈思明, 王建成. 从麦克斯韦方程组建立的新电路理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999, 264~276
- 4 王建成, 陈荣年. 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及应用[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1989, 10(2): 125~132
- 5 陈义成. 电磁学[M]. 北京: 科学出版社, 2002. 155~156

Magnetic Field on the Infinite Current Carrying Sheet in Anisotropic Magnetic Medium

Wu Lili Wang Jiancheng Lin Jie

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract Based on Biot-Savart law of anisotropy magnetic medium and the magnetic field of infinite length current carrying direct wire in anisotropic medium, the authors further solve the magnetic field at any point in anisotropy magnetic medium on the infinite current carrying sheet. The results expand the application range of the Biot-Savart law.

Keywords magnetic field, anisotropy magnetic medium, current carrying sheet, infinite