

# 新型高阶 Butterworth 最佳传递函数

李 钟 慎

(华侨大学机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

**摘要** 提出一种新型高阶 Butterworth 最佳传递函数的设计方法, 给出其频率特性和单位阶跃响应. 实例和仿真都表明, 新型高阶 Butterworth 最佳传递函数优于传统高阶 Butterworth 最佳传递函数, 既降低系统的超调量, 又提高系统的鲁棒性.

**关键词** Butterworth, 极点分布, 最佳传递函数, 超调量

**中图分类号** TN 713<sup>+</sup>.402; TP 273

**文献标识码** A

系统的闭环频率特性具有低通滤波器特性<sup>[1]</sup>, Butterworth 滤波器是一种具有最大平坦幅度响应的低通滤波器, 具有本质的稳定性<sup>[2]</sup>. 文[3]给出 Butterworth 最佳传递函数, 利用这些最佳传递函数, 只要通过非常简单的代数运算, 就能将被控对象设计成最佳控制系统<sup>[4,5]</sup>. 并且, 这些最佳传递函数在许多文献中被用来设计最佳控制系统<sup>[3~5]</sup>. 高阶系统、纯滞后系统是比较特殊的工业对象, 在工业过程中比较常见. 利用 Butterworth 最佳传递函数设计这两类对象的状态反馈控制器时发现, 所设计的系统超调量过大、鲁棒性低、单位阶跃响应品质差<sup>[6]</sup>, 这说明传统的 Butterworth 最佳传递函数已不适应高阶最佳系统的设计. 本文提出一种新型高阶 Butterworth 最佳传递函数, 解决传统高阶 Butterworth 最佳传递函数的上述问题.

## 1 新型高阶 Butterworth 最佳传递函数

Butterworth 低通滤波器是一种全极点滤波器, 它的各个极点均匀分布在复平面的 Butterworth 圆周上, 相邻两个极点之间的相位差为  $180^\circ/n$ , 最靠近虚轴的极点与虚轴之间的夹角  $\theta = 180^\circ/2n$ . 传统 6 阶 Butterworth 滤波器的极点分布, 如图 1(a) 所示. 随着 Butterworth 滤波器阶数  $n$  的升高, 其共轭复根的极点分布向靠近虚轴的方向变化, 极点越靠近虚轴, 阻尼比  $\zeta$  就越小, 超调量就越大, 系统就越不稳定. 阻尼比  $\zeta$  太小, 振荡剧烈, 过渡过程时间太长, 不利于系统稳定; 但阻尼比  $\zeta$  太大, 过渡过程时间也随之变长, 同样不利于系统稳定. 当  $n=5$  时,  $\theta=18^\circ$ ; 而当  $n=6$  时,  $\theta=15^\circ$ ; ... 由此可见, 5 阶及以上的高阶 Butterworth 滤波器的主导极点已很靠近虚轴. 为了提高系统的瞬态响应品质和鲁棒性, 有必要对 5 阶及以上的高阶 Butterworth 滤波器的极点进行重新分布.

根据文[7]提供的基于稳定裕度确定预期闭环传递函数的方法, 将高阶 Butterworth 滤波器最靠近虚轴的主导极点与虚轴之间的夹角  $\theta$  指定为常数(取  $\theta=25^\circ$ ). 不受阶数  $n$  的影响, 剩下的极点均匀地分

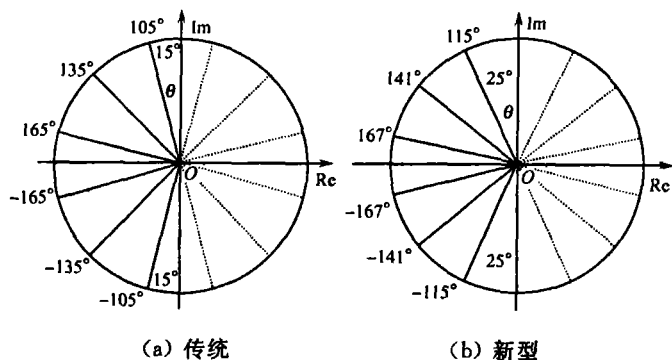


图 1 两种 6 阶 Butterworth 滤波器的极点分布图

**收稿日期** 2005-10-14

**作者简介** 李钟慎(1971-), 男, 副教授, 主要从事最优控制及预测控制的研究. E-mail: lzszyw@hqu.edu.cn

**基金项目** 福建省自然科学基金资助项目(A0410020)

布在复平面的 Butterworth 圆周上,相邻两个极点之间的相位差为 $(180^{\circ}-2\theta)/(n-1)$ ,得到新型高阶 Butterworth 最佳传递函数,图 1(b)给出了新型 6 阶 Butterworth 滤波器的极点分布. 这样,当  $n$  为奇数时,新型高阶 Butterworth 最佳传递函数为

$$\varphi(s)=[1/(\frac{s}{\omega_c}+1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{s^2}{\omega_c^2}+2(\cos\theta_k)\frac{s}{\omega_c}+1)],$$

(1)

式(1)中, $\theta_k=k(180^{\circ}-2\theta)\times\pi/[(n-1)\times180^{\circ}]$ ;当  $n$  为偶数时,新型高阶 Butterworth 最佳传递函数为

$$\varphi(s)=[1/\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}}(\frac{s^2}{\omega_c^2}+2(\cos\theta_k)\frac{s}{\omega_c}+1)],$$

(2)

在式(2)中, $\theta_k=(2k-1)(180^{\circ}-2\theta)\times\pi/[2(n-1)\times180^{\circ}]$ . 令  $\bar{s}=s/\omega_c$ ,新型高阶 Butterworth 最佳传递函数  $\varphi(\bar{s})=1/(\bar{s}^n+\beta_{n-1}\bar{s}^{n-1}+\cdots+\beta_1\bar{s}+1)$ . 表 1 给出了 5~8 阶归一化的新型高阶 Butterworth 最佳传递函数的分母多项式系数及其超调量. 图 2 为 5~8 阶新型 Butterworth 和传统 Butterworth 最佳传递

表 1 新型高阶 Butterworth 最佳传递函数的分母多项式系数及其超调量

$n$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\sigma_p/(%)$
5	—	—	—	3.532 0	5.957 7	5.957 7	3.532 0	6.43
6	—	—	4.348 3	8.989 8	11.256 7	8.989 8	4.348 3	5.07
7	—	5.159 1	12.664 7	19.109 8	19.109 8	12.664 7	5.159 1	4.13
8	5.965 7	16.976 2	30.017 7	36.018 7	30.017 7	16.976 2	5.965 7	3.45

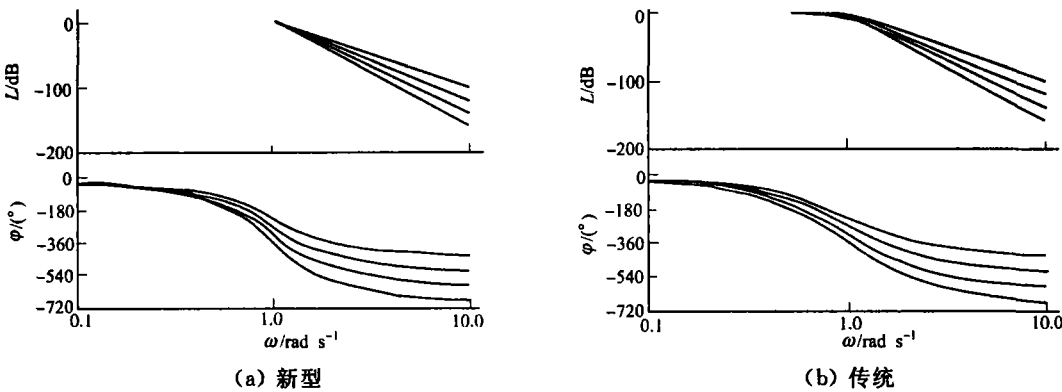


图 2 两种 Butterworth 最佳传递函数的 Bode 图

函数的 Bode 图. 图中, $L$  为增益, $\omega$  为角频率, $\varphi$  为相位. 从图 2 可以看出,新型高阶 Butterworth 最佳传递函数仍具有 Butterworth 最佳传递函数的频率特性. 5~8 阶新型 Butterworth 和传统 Butterworth 最佳传递函数的单位阶跃响应曲线,如图 3 所示. 图中, $A$  为幅值,实线和虚线分别表示新型和传统 Butterworth 最佳传递函数. 从图 3 可以看出,新型高阶 Butterworth 与传统高阶 Butterworth 最佳传递函数相比,超调量大大减少,单位阶跃响应品质更加理想. 系统的阶数  $n$  越高,新型高阶 Butterworth 最佳传递函数的优越性越明显.

2 实例及仿真

假设给定的被控对象为二阶加纯滞后系统,有  $G_p(s)=0.1e^{-s}/[(s+0.1)(s+1)]$ . 将纯滞后因子  $e^{-s}$  近似为四阶分母模型<sup>[8]</sup>,即  $e^{-s}\approx 1/[1+s+\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{24}s^4]$ . 则被控对象近似为

$$G_p(s)\approx\frac{2.4}{s^6+5.1s^5+16.5s^4+37.6s^3+51.6s^2+28.8s+2.4}.$$

根据文[9],分别以 6 阶新型 Butterworth、传统 Butterworth 和 ITAE<sup>[8]</sup> 最佳传递函数做为系统的闭环传递函数,设计出状态反馈增益阵  $k$  和观测器的最优权系数向量  $\Phi$ . 采用如图 4 的结构进行仿真,

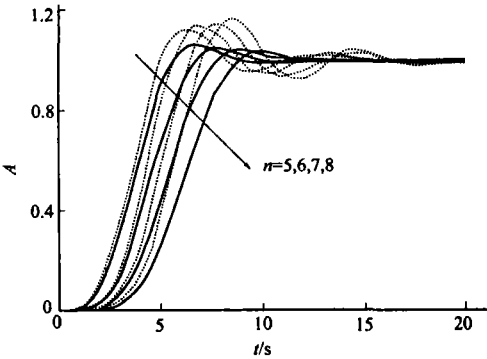


图 3 两种最佳传递函数的单位阶跃响应

以上述 3 种最佳传递函数设计的系统的单位阶跃响应,如图 5 所示.从图 5 可以看出,采用新型 Butterworth 最佳传递函数设计的系统优于采用传统 Butterworth 最佳传递函数设计的系统,并可与采用

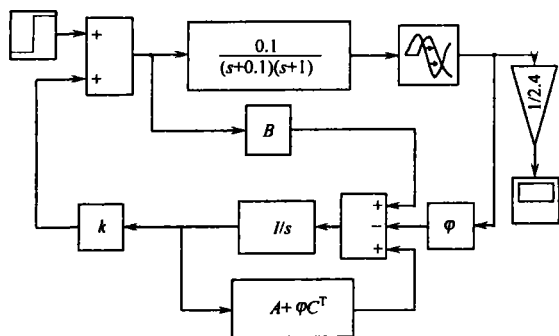


图 4 仿真结构图

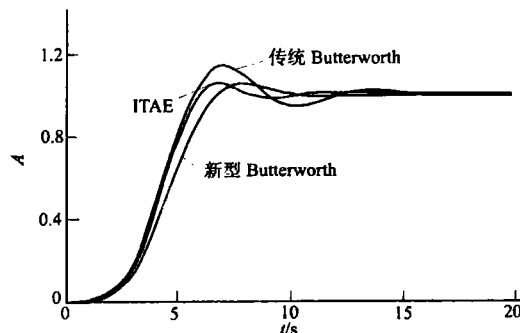


图 5 不同最佳传递函数设计的单位阶跃响应曲线

ITAE 最佳传递函数设计的系统相媲美.

### 3 结束语

针对传统高阶 Butterworth 最佳传递函数存在超调量大、鲁棒性低的弱点,本文对高阶 Butterworth 滤波器的极点进行重新分布,得出一种超调量小、鲁棒性高和阶跃响应品质好的最佳传递函数——新型高阶 Butterworth 最佳传递函数.同时,将它应用于纯滞后对象的最佳控制系统设计中,实现高阶状态反馈最佳系统的鲁棒控制.这为最佳控制提供一种新型的最佳传递函数,也为高阶对象、纯滞后对象的鲁棒控制提供一条新的途径.

### 参 考 文 献

- 1 Morari M, Zafiriou E. Robust process control[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1989. 11~38
- 2 王永初. Butterworth 滤波器在过程控制中的应用(I)[J]. 工业仪表与自动化装置, 1994, (6): 13~15
- 3 孙增圻. 系统分析与控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994. 199~203
- 4 王永初. 系统的分散与集中决策(I)——局部优化子系统设计[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(2): 200~204
- 5 王 伟, 郑耀林. 一种采用 Butterworth 滤波器原理设计的具有高鲁棒性的状态反馈系统[J]. 电子测量与仪器学报, 2001, 15(4): 16~20
- 6 李钟慎, 王永初. 一种设计状态反馈控制器的改进方法[J]. 南昌大学学报(工科版), 2002, 24(4): 74~78
- 7 Lewis F L. Optimal control[M]. New York: Wiley-Interscience Publication, 1991. 66~80
- 8 杨益群, 项国波. 新的 ITAE 最佳传递函数标准型[J]. 信息与控制, 1997, 26(4): 259~265
- 9 李钟慎, 王永初. 基于状态反馈的纯滞后对象的次优控制[J]. 上海交通大学学报(自然科学版), 2002, 36(s1): 138~140

## Study of the New High Order Butterworth Optimum Transfer Function

Li Zhongshen

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

**Abstract** In this paper, a method of designing a new high order Butterworth optimum transfer function is presented, the new high order Butterworth optimum transfer functions as well as their frequency characteristics and unit step responses are also given. The example and simulation show that the new high order Butterworth optimum transfer functions are superior to the traditional high order Butterworth optimum transfer functions, which can reduce the overshoot of the system and increase the robustness of the system.

**Keywords** Butterworth, poles distribute, optimum transfer function, overshoot