

# 约束方程的分区网格划分法

李士军 郝艳华

(华侨大学机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

**摘要** 在有限元中,把形状复杂的模型划分成四边形或六面体网格,一直以来都是一个很难解决的问题.利用约束方程进行分区网格划分,把一个模型分成多个形状规则的小区域并对其进行映像网格划分,然后使用约束方程,把相邻区域相接面上的单元节点联系起来.解决对复杂模型进行网格划分时很难划分出理想网格的问题,并对不同的小区域进行网格密度控制.

**关键词** 网格划分,有限元,分区域,约束方程

**中图分类号** TH 123<sup>+</sup>.1; O 241.82

**文献标识码** A

在整个有限元分析过程中,前处理时间约占 40%~45%,而分析求解计算的时间只占 5%左右<sup>[1]</sup>.前处理工作主要是建立模型和划分网格.一般来说,在二维模型中四边形单元是推荐的网格;在三维模型中六面体单元是推荐使用的.因为这些形状的单元精度高,而且同一模型划分为四边形或六面体单元后,总的节点数量相对较少,可以有效地减少计算耗时.但实际工程结构非常复杂,利用现有的有限元软件,很难把这些形状复杂的模型全部划分成六面体单元.通常可进行全自动网格划分是四面体单元,而且在网格划分完后单元的数量很庞大,很难对单元的数量进行控制.基于上述原因,文中提出一种新的网格划分方法——分区域网格划分.它的基础是约束方程,即把一个模型分割成很多规则的六面体,然后再分别将这些小区域划分成六面体网格.最后,利用约束方程,把小区域接口间的节点联系起来,以求解整体刚度方程.

## 1 约束方程的生成

约束方程,就是把一个节点的某个自由度与其他一个或者多个节点的自由度,通过某种关系联系起来.本文通过单元形函数,把这些节点联系起来.为简单起见,又不失普遍性,以二维 4 节点四边形单元为例加以说明.由两个四边形  $ABCD$  和  $A'B'C'D'$  组成的平面模型,并分别划分网格,如图 1 所示.其中  $AD$  边和  $A'B'$  边是重合在一起的.为了便于观察,在图 1 中把两个四边形分开画出.取出与边界线  $AD$  相关的一个单元  $e$  和  $A'B'$  边界上的一个节点  $k$ ,如图 2 所示.单元  $e$  由节点  $i, j, m, n$  (逆时针排序) 4 个节点组成,其局部坐标与总体坐标的坐标变换可以表示为<sup>[2]</sup>

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta, \eta) y_i.$$

在局部坐标中,节点  $k$  的坐标是  $(\zeta_k, 1)$ , 节点  $i, j, m, n$  的坐标分别是  $(-1, -1), (1, -1), (1, 1)$  和  $(-1, 1)$ . 单元  $e$  中的局部坐标的形函数为

$$N_i(\zeta, \eta) = \frac{(1 + \zeta \zeta_i)(1 + \eta \eta_i)}{4}, \quad i = i, j, m, n. \quad (1)$$

平面四边形 4 节点单元的每个节点有  $x$  方向的  $u$  和  $y$  方向的  $v$  两个位移自由度.在总自由度向量中,节点  $i, j, k, m, n$  的位移自由度为  $[\cdots u_i u_{i+1} \cdots u_j u_{j+1} \cdots u_m u_{m+1} \cdots u_n u_{n+1} \cdots u_k u_{k+1} \cdots]^T$ , 其中,  $u_i$  是节点

**收稿日期** 2005-08-22

**作者简介** 李士军(1979-),男,硕士研究生,主要从事有限元分区网格划分的研究;通信作者:郝艳华(1962-),女,研究员, E-mail: haoyh@hqu.edu.cn

**基金项目** 华侨大学科研基金资助项目(03BS204)

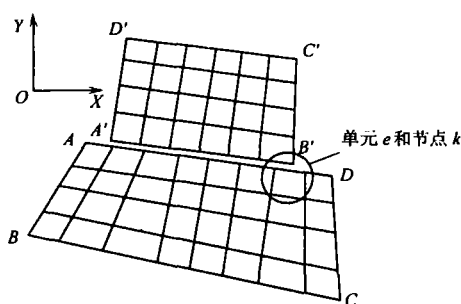


图1 平面模型

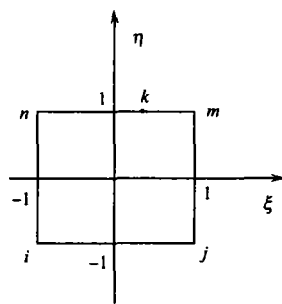


图2 参数化坐标下的单元e和节点k

$i$  在  $x$  方向的位移自由度 ( $i=i, j, k, m, n$ ),  $u_{i+1}$  是节点  $i$  在  $y$  方向的位移自由度, 也就是对应的自由度  $v$  ( $i=i, j, k, m, n$ ). 单元  $e$  中的位移形函数为

$$u = N_i(\xi, \eta)u_i + N_j(\xi, \eta)u_j + N_m(\xi, \eta)u_m + N_n(\xi, \eta)u_n,$$

$$v = N_i(\xi, \eta)u_{i+1} + N_j(\xi, \eta)u_{j+1} + N_m(\xi, \eta)u_{m+1} + N_n(\xi, \eta)u_{n+1}.$$

在上式中,  $v$  为单元  $e$  内部在  $y$  方向的位移自由度. 把节点  $k$  的局部坐标代入位移函数中, 可以得到节点  $k$  与其他节点  $i, j, m, n$  的位移关系式. 即

$$N_m(\xi_k, 1)u_m + N_n(\xi_k, 1)u_n - u_k = 0, \quad (2)$$

$$N_{m+1}(\xi_k, 1)u_{m+1} + N_{n+1}(\xi_k, 1)u_{n+1} - u_{k+1} = 0. \quad (3)$$

方程(2),(3)就是约束方程. 自由度  $u_k$  和  $u_{k+1}$  分为约束方程(2),(3)的主自由度. 把方程(2),(3)改写为标准形式, 有

$$\sum_{j=1}^N C_{mj} u_j = C_m, \quad (4)$$

在式(4)中,  $C_{mj}$  为第  $m$  个约束方程的  $u_j$  自由度的系数,  $C_m$  是第  $m$  个约束方程的常数项. 一般来说, 约束方程的常数项为 0,  $N$  为总的自由度数量,  $m$  表示这个约束方程的第  $m$  个约束方程. 假设方程(2)为第  $k$  个约束方程, 则可改写为

$$\sum_{j=1}^N C_{kj} u_j = C_k.$$

在上式中,  $C_{km} = N_m(\xi_k, 1)$ ,  $C_{kn} = N_n(\xi_k, 1)$ ,  $C_{kk} = -1$ ,  $C_k = 0$ ,  $C_{kj} = 0, j=1, \dots, N$  且  $j \neq m, n$ . 自由度  $u_k$  为这个约束方程的主自由度.

## 2 总体刚度矩阵的修正<sup>(3~5)</sup>

对方程(4)两边同除以主自由度  $u_k$  的系数  $C_{mk}$ , 可得

$$\sum_{j=1}^N C_{mj}^* u_j = C_m^*, \quad (5)$$

在式(5)中,  $C_{mj}^* = \frac{C_{mj}}{C_{mk}}$ ,  $C_m^* = \frac{C_m}{C_{mk}}$ . 把方程(5)改写为

$$u_k + \sum_{j=1}^N C_{mj}^* u_j = C_m^*, \quad j \neq k, \quad (6)$$

总体的刚度方程为

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} u_j = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

总体刚度方程(7)可以写为

$$K_{kk} u_k + \sum_{j=1}^N N_{ij} u_j = F_i, \quad j \neq k. \quad (8)$$

方程(6)两边同乘以  $K_{kk}$ , 可得

$$K_{kk} u_k + \sum_{j=1}^N N_{ij} C_{mj}^* u_j = K_{kk} C_m^*, \quad j \neq k. \quad (9)$$

方程(8)减去方程(9), 可得

$$\sum_{j=1}^N (K_{ij} - C_{mj}^* K_{kk}) u_j = F_i - C_m^* K_{kk}, \quad j \neq k. \quad (10)$$

特别是当  $i=k$  时,有

$$\sum_{j=1}^N (K_{ij} - C_{mj}^* K_{kk}) u_j = F_k - C_m^* K_{kk}. \quad (11)$$

引入拉个朗日乘子  $\lambda_i$ , 将方程(10)和方程(11)组合为

$$\sum_{j=1}^N (K_{ij} - C_{mj}^* K_{kk}) u_j - F_i + C_m^* K_{kk} + \lambda_i \left[ \sum_{j=1}^N (K_{ij} - C_{mj}^* K_{kk}) u_j - F_k + C_m^* K_{kk} \right] = 0, \quad j \neq k, \quad (12)$$

在式(12)中,  $\lambda_i = \frac{\partial u_k}{\partial u_i}$ . 由方程(6)可以得到  $u_k = C_m^* - \sum_{j=1}^N C_{mj}^* u_j$ , 则  $\lambda_i = \frac{\partial u_k}{\partial u_i} = -C_m^*$ . 将其带入方程(12)中,可以得到

$$\sum_{j=1}^N (K_{ij} - C_{mj}^* K_{kk}) u_j - F_i + C_m^* K_{kk} - C_m^* \left[ \sum_{j=1}^N (K_{ij} - C_{mj}^* K_{kk}) u_j - F_k + C_m^* K_{kk} \right] = 0, \quad j \neq k.$$

经整理后,可得

$$\sum_{j=1}^N (K_{ij} + C_m^* C_{mj}^* K_{kk} - C_{mj}^* K_{kk} - C_m^* K_{kj}) u_j = F_i + C_m^* C_m^* K_{kk} - C_m^* K_{kk} - C_m^* F_k, \quad j \neq k. \quad (13)$$

令

$$K_{ij}^* = K_{ij} + C_m^* C_{mj}^* K_{kk} - C_{mj}^* K_{kk} - C_m^* K_{kj}, \\ F_i^* = F_i + C_m^* C_m^* K_{kk} - C_m^* K_{kk} - C_m^* F_k,$$

则方程(13)变换为

$$\sum_{j=1}^N K_{ij}^* u_j = F_i^*. \quad (14)$$

对方程(14)引进位移边界条件(约束条件)、约束结构的刚体位移,就可以求解出各个自由度的值。

### 3 实例验证对比分析

以一角托架为例(图3),其厚度为 0.012 7 m,材料为弹性模量为 206.7 MPa,泊松比为 0.27. 圆孔  $O_1$  被全部约束,圆孔  $O_2$  的圆弧  $CDE$  是施加的非均匀面力,从  $C$  点到  $D$  点是从 344.5 kPa 变化到 689 kPa,再从  $D$  点有 689 kPa 变化到  $E$  点的 344.5 kPa. 分别采用整体模型和分区模型分析托架的应力和变形情况. 对于分区模型,在直线  $AB$  处把模型分为  $S_1$  和  $S_2$  两个部分. 分别对  $S_1$  和  $S_2$  进行网格划分,在直线  $AB$  处使用约束方程,把  $S_1$  和  $S_2$  部分的单元连接起来,如图4所示. 利用 ANSYS 软件求

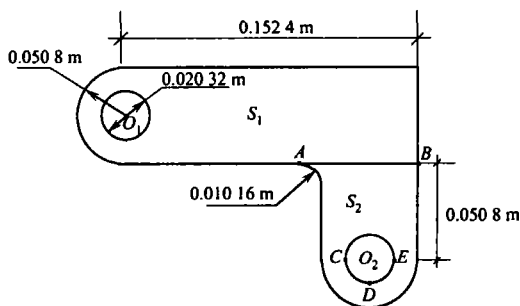


图3 托架尺寸图

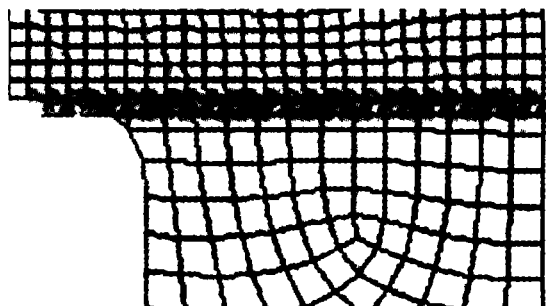
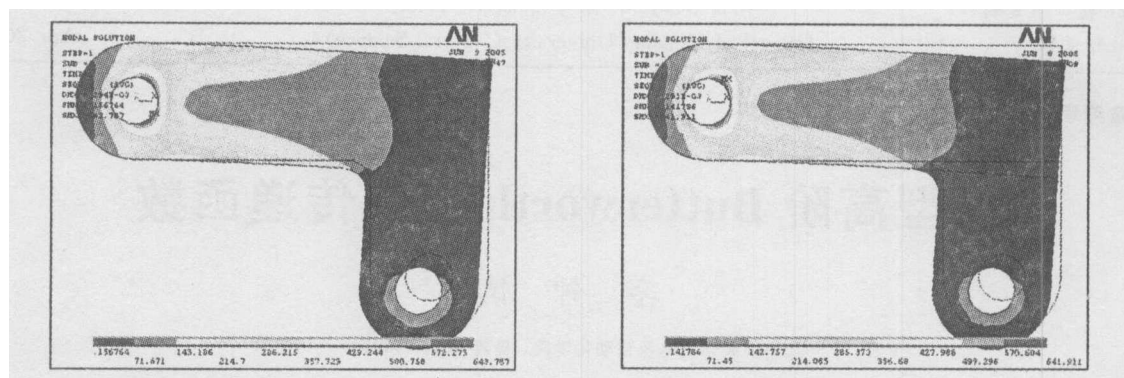


图4 约束方程连接图

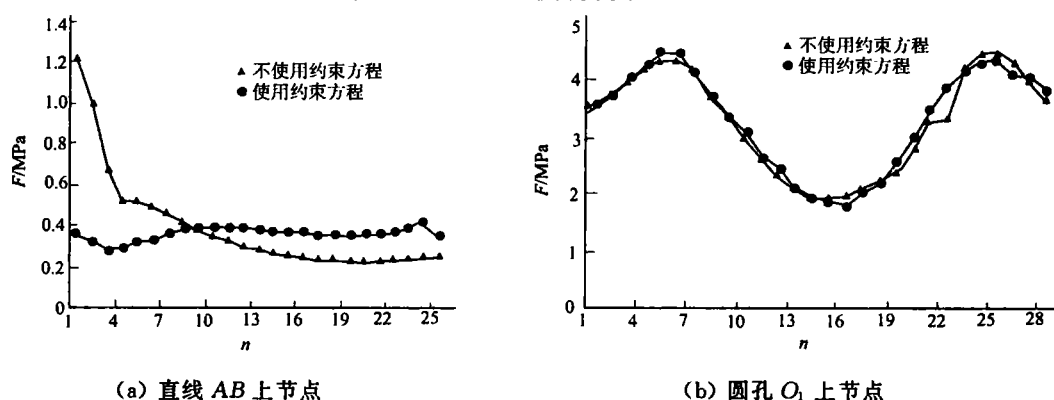
解计算完毕后,两种情况下的等效应力变形结果,如图5所示. 由图5可以看出,使用约束方程对整体的 Von-Mises 应力变形图几乎没有影响,和不使用约束方程的等效应力变形图形几乎一样,只是在局部应力不是很好. 从图6(a)中可以看出,在直线  $AB$  上,使用约束方程的和不使用约束方程的得出的数据偏差很大. 但是两条曲线都是以 0.4 MPa 为中心上下浮动,其中不使用约束方程的数据曲线浮动得特别剧烈,而中间位置基本一致. 而圆孔  $O_1$  周围的两条应力( $F$ )曲线符合的很好(图6b),说明在远离使用约束方程的节点( $n$ )处,使用约束方程得出数据能够很好的反映该节点处的真实应力。



(a) 不使用约束方程

(b) 使用约束方程

图5 Von-Mises 应力变形图



(a) 直线 AB 上节点

(b) 圆孔  $O_1$  上节点

图6 Von-Mises 应力对比图

## 4 结束语

由于分区网格划分法,在靠近约束方程边界上的应力偏差较大,中间位置最小,这会造成计算数据不真实.但是,它可以通过加密网格,最终使应力趋于真实值.因此,对于形状比较复杂的模型,能够很好地用分区域网格划分法进行网格密度和形状的控制.通过类似的方法,把二维的分区域网格划分法扩展为三维的分区域网格划分法,也可以得出类似上面的结论.

## 参 考 文 献

- 1 王 瑞,陈海霞,王广峰. ANSYS 有限元网格划分浅析[J]. 天津工业大学学报(自然科学版),2002,21(4):8~11
- 2 傅永华. 有限元分析基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003. 65~70
- 3 张胜民. 基于有限元软件 ANSYS 7.0 的结构分析[M]. 北京:清华大学出版社,2003. 49~84
- 4 谭建国. 使用 ANSYS 6.0 进行有限元分析[M]. 北京:北京大学出版社,2002. 132~192
- 5 张传立,彭兴黔. 分析表面裂纹的一种新方法[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2002,23(2):164~167

## The Regional Meshing Method Based on Constraint Equation

Li Shijun Hao Yanhua

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

**Abstract** It has been a difficult issue to generate a mapped meshing for complicated models in finite elements, which are divided into many small quadrangles or small hexahedrons. Regional mapped meshing can be completed by constraint equation, in which a model is divided into several regular regions in shape. And then the constraint equation is used to link the nodes of different regions to deal with the difficult issue which ideal regions are hard to be obtained during the regional meshing of a complicated model, to implement the density regional control of small different regions.

**Keywords** meshing, finite element, regional, constraint equation