

# 框架结构稳定分析的泡函数有限元法

高 轩 能      王 仁 辉

(华侨大学土木工程学院, 福建 泉州 362021)

**摘要** 寻求一种既有普通杆件有限元的简洁性,又能求解所有框架结构临界载荷的有效方法.根据框架结构杆件失稳变形和泡函数的特点,采用新的基函数系,在普通杆件有限元的形函数中引入泡函数,得到泡函数有限单元法.泡函数是定义在有限单元上的一个模型,其在单元的边界上为零,而在内部非零.它的应用改善了普通杆件有限元法的收敛性,并使其适用于任何框架结构的屈曲分析.算例表明,泡函数有限元法对于框架结构的屈曲分析具有良好的适应性、稳定性、收敛性和求解效率,是一种进行大型结构屈曲分析的有效方法.

**关键词** 泡函数有限元法, 框架结构, 柱计算长度, 稳定分析, 有限元法

**中图分类号** TU 323. 501

**文献标识码** A

在结构稳定分析的普通有限元法中,以框架结构杆件的自然结点作为单元结点,所得结果的精度往往不确定,时好时坏,有时甚至是谬误的.等截面理想轴心压杆杆长为  $L$ ,在不同端部约束条件下的屈曲荷载精确解,以及相应的以杆件自然结点划分单元的普通有限元(FEM1)和本文方法(BFEM)的计算结果,如表 1 所示.表中,符号“—”表示求解失效,下同; $P_{cr}$  = 表中数值  $\times \pi^2 EI/L^2$ .从表 1 中结果可知,FEM1 的求解精度很不稳定,总体上来说,随着杆端约束程度的增加,误差( $\varphi$ )急剧增加.当杆件两端固

表 1 理想轴心压杆的屈曲荷载  $P_{cr}$

杆端支 承条件	一端自由 一端固定	两端铰支	一端转动约束 一端铰支	一端转动约束 一端固定	一端铰支 一端固定	两端固定
理论值 <sup>(1,2)</sup>	0.250	1.000	0.250	1.000	2.046	4.000
FEM1	0.252	1.216	0.252	1.013	3.040	—
$\varphi/(%)$	0.75	21.60	0.75	1.32	48.60	—
BFEM	0.250	1.001	0.250	1.013	2.108	4.070
$\varphi/(%)$	0	0.10	0	1.32	3.03	1.76

定时,方法失效,表明 FEM1 在框架结构稳定分析中的计算结果不一定可用.由此可见,框架结构稳定有限元分析的精度不仅取决于结构的几何形式,还取决于构件结点的连接方式.

## 1 基本原理和单元刚度的建立<sup>(3,4)</sup>

通常,杆系结构屈曲分析的普通有限元是建立在轴向线性位移和横向三次多项式位移模型基础之上的,是一种极小化单元模型.在单元内部补充内自由度并在横向位移模型上增加任意泡状函数项,就可构成泡函数有限单元位移模型.为此,取横向位移模型基函数系为 $[1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^6]$ .如图 1 所示,只考虑弯曲变形影响的泡函数单元的形函数矩阵 $[N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5]$ ,其中  $N_1 = (2\eta +$

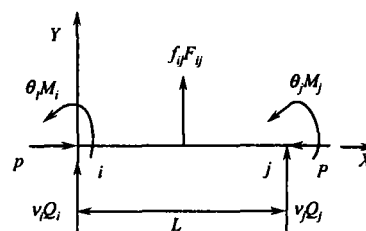


图 1 单元力与单元位移

$1)(\eta-1)^2$ ,  $N_2 = L\eta(\eta-1)^2$ ,  $N_3 = -\eta^2(2\eta-3)$ ,  $N_4 = L\eta^2(\eta-1)$ ,  $N_5 = \alpha\eta^2(\eta-1)^2 + \beta\eta^3(\eta-1)^3$ (泡函数).  $\alpha, \beta$  为任意常数,  $\eta = x/L$ ,  $L$  为杆单元几何长度.同普通有限元一样,应用虚功原理可得到单元的弯

收稿日期 2005-08-19

作者简介 高轩能(1962-),男,教授,博士,主要从事钢结构和组合结构的研究. E-mail: gaoxn@hqu.edu.cn

基金项目 华侨大学科研基金资助项目(03BS406);江西省教育厅科研基金资助项目(GJ2004-12)

曲刚度矩阵和几何刚度矩阵<sup>[2,5]</sup>. 单元的位移函数为  $y=Nu$ . 其中,  $u=[v_i \ \theta_i \ v_j \ \theta_j \ f_{ij}]^T$ , 则单元的外力功和应变能为  $W_e=\frac{1}{2}u^T q+\frac{P}{2}\int_0^L(y')^2 dx$ ,  $U_e=\frac{EI}{2}\int_0^L(y'')^2 dx$ . 式中,  $P$  为轴心压力,  $q$  为单元力列阵,  $q=[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5]^T=S_e u$ . 将位移函数式代入外力功和应变能式, 应用  $\delta W_e=\delta U_e$ , 可得

$$S_e = EI \int_0^L (N'')^T (N'') dx - P \int_0^L (N')^T (N') dx = k_e - g_e. \quad (1)$$

上式中,  $k_e=(k_{ij})=EI \int_0^L N''_i N''_j dx$ ,  $g_e=(g_{ij})=P \int_0^L N'_i N'_j dx$ . 则其显式为

$$k_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -12 & -6L & 12 & -6L & 0 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad g_e = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L & 0 \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 & b \\ -36 & -3L & 36 & -3L & 0 \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 & -b \\ 0 & b & 0 & -b & c \end{bmatrix}. \quad (2)$$

在式(2)中,  $a=\frac{4}{5}\alpha^2-\frac{12}{35}\alpha\beta+\frac{2}{35}\beta^2$ ,  $b=(\alpha-\frac{3}{14}\beta)L$ ,  $c=(44\alpha^2-22\alpha\beta+3\beta^2)/77$ . 式(2)中,  $k_e$  和  $g_e$  中的前 4 行与前 4 列就是普通有限元的刚度矩阵, 表明泡函数有限元只比普通有限元 FEM1 增加少量的存储空间. 此外, 上述刚度矩阵中只给出了弯曲影响项, 轴向力项通常在刚度矩阵  $k_e$  中为  $\pm EA/L$ , 在  $g_e$  中为 0. 要考虑轴向压缩变形影响时, 可在矩阵行列的适当位置增加轴向力项. 把局部坐标系下的单元刚度矩阵  $k_e, g_e$  转换成整体坐标系下的单元刚度矩阵  $K_e, G_e$  后, 同普通有限元一样, 在结构的每个结点上建立平衡方程和位移协调条件, 按“对号入座, 同号相加”的原则, 即可形成整体坐标系下的结构刚度矩阵  $K$  和几何刚度矩阵  $G$ . 因此, 得到结构的屈曲方程(推导单元刚度矩阵时, 单元轴向力  $P$  以压为正)为  $|K-G|=0$ . 其中,  $K$  为结构的弯曲刚度矩阵,  $G$  为结构的几何刚度矩阵. 由此可将结构稳定问题最终化为标准特征值问题<sup>[6,7]</sup>, 从而求出结构的屈曲荷载和相应的构件计算长度系数.

## 2 $\alpha$ 和 $\beta$ 的最佳取值及泡函数单元的性能

由式(2)可知, 用泡函数有限元法(BFEM)进行结构的稳定分析时, 理论上  $\alpha, \beta$  的取值可为任意常数, 但它们取值的不同却导致求解的精度不同. 也就是说, BFEM 的求解精度决定于  $\alpha, \beta$  的取值. 经分析计算得到如下规律, 对于同一结构计算模型, 当取  $\alpha:\beta=k$  ( $k$  为任意常数)的各组值时, BFEM 得出的屈曲荷载值相同. 例如, 当取  $\alpha=-2, \beta=5$  和  $\alpha=2, \beta=-5$  时, BFEM 所得的同一结构模型的屈曲荷载相同. 因此, 确定最佳  $\alpha, \beta$  的值就变成先确定合适的  $k$  值, 再据此确定最佳的  $\alpha, \beta$  值. 为此, 可取若干组有代表性的  $\alpha, \beta$  值, 并绘出其对求解精度影响的曲线, 如图 2 所示. 由图 2 可知,  $k$  值越接近 -1, BFEM 的精度越高. 当  $\alpha:\beta=-1$  且  $\alpha=3, \beta=-3$  时, 精度最高, 误差基本在 3% 以内. 因此, 本文取  $\alpha=3, \beta=-3$ . 此时, 式(2)中的  $a=54/5, b=51L/14, c=621/77$ , 使刚度矩阵中的各元数值相近, 不致产生病态矩阵.

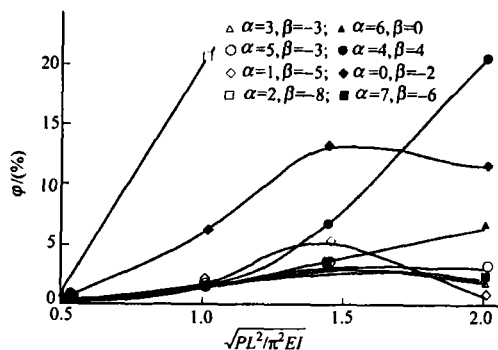
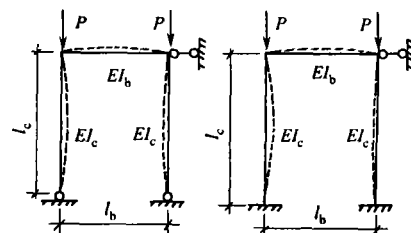


图 2  $\alpha, \beta$  取值与误差率曲线



(a) 柱脚铰接 (b) 柱脚刚接

图 3 无侧移单层框架

## 3 算例

**算例 1** 图 3(a), (b) 分别为柱脚铰接和刚接等截面无侧移单层框架, 柱顶作用集中荷载  $P$ . 采用本文方法(BFEM)和普通有限元法(FEM1), 对其在不同梁、柱线刚度比  $K_1$  ( $K_1=I_b l_c / I_c l_b$ ) 下框架柱的计算长度系数  $\mu$  进行了计算, 计算结果和精确解如表

2 所示. 由表 2 可知, FEM1 的计算结果误差( $\varphi$ )均较大. 对于铰接柱脚框架, 最大误差达到  $-18.06\%$ ; 而对于刚接柱脚框架, 则最小误差为  $-18.06\%$ , 并且随着柱端约束的增大, FEM1 计算结果的误差也越

表 2 柱脚铰接和刚接无侧移单层框架柱计算长度系数

$K_1$	0	0.2	1	2	5	10	$\infty$
精确解 <sup>(8)</sup>	1.000	0.964	0.875	0.820	0.760	0.732	0.700
柱脚 FEM1	0.907	0.866	0.765	0.702	0.635	0.606	0.574
铰接 $\varphi/(%)$	-9.310	-10.130	-12.590	-14.330	-16.420	-17.280	-18.060
BFEM	1.000	0.963	0.874	0.819	0.756	0.726	0.689
$\varphi/(%)$	0.000	-0.060	-0.110	-0.140	-0.510	-0.860	-1.610
精确解 <sup>(8)</sup>	0.700	0.679	0.626	0.590	0.546	0.524	0.500
柱脚 FEM1	0.574	0.547	0.468	0.406	0.307	0.234	—
刚接 $\varphi/(%)$	-18.06	-19.46	-25.19	-31.26	-43.85	-55.31	—
BFEM	0.689	0.670	0.618	0.583	0.542	0.521	0.496
$\varphi/(%)$	-1.61	-1.39	-1.27	-1.13	-0.81	-0.60	-0.87

大. 当  $K_1=\infty$  时, FEM1 无法求解, 表明 FEM1 不适合求解此类问题. 与此相反, 本文方法 (BFEM) 对于上述框架的稳定分析结果不仅精度很好, 而且不受柱端约束程度和柱脚连接方式的影响.

**算例 2** 图 4(a), (b) 分别为柱脚刚接和铰接等截面双层框架, 柱顶作用集中荷载  $P$ . 两种方法计算结果和精确解, 如表 3 所示. 表 3 的结果表明, 框架结构增加层数后, BFEM 和 FEM1 的求解精度几乎未受影响. FEM1 的求解精度与框架柱端约束程度仍然成反比, 与精确解相比, FEM1 的计算结果误差很大. 对于柱脚刚接框架, 最小误差达到  $-11.96\%$ , 已超过工程许可范围, 结果不可用. 由此可说明, 结构的复杂程度并不是影响有限元法求解精度的主要因素, 也即泡函数有限元法 BFEM 可以用来求解复杂结构的屈曲问题.

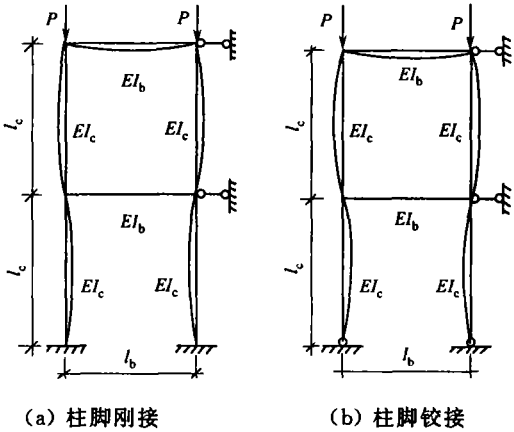


图 4 无侧移双层框架

表 3 无侧移双层框架柱的计算长度系数

$K_1$	0	0.5	1	2	5	10	$\infty$
精确解 <sup>(8)</sup>	0.879	0.803	0.753	0.689	0.608 <sup>①</sup>	0.561 <sup>①</sup>	0.500
柱脚 FEM1	0.774	0.683	0.620	0.537	0.412	0.321	—
刚接 $\varphi/(%)$	-11.960	-14.940	-17.620	-22.070	-32.260	-42.830	—
BFEM	0.876	0.800	0.750	0.687	0.605	0.559	0.496
$\varphi/(%)$	-0.350	-0.390	-0.450	-0.320	-0.520	-0.430	-0.870
精确解	1.000	0.922	0.875	0.820	0.760	0.731	0.698
柱脚 FEM1	0.907	0.819	0.765	0.702	0.635	0.606	0.574
铰接 $\varphi/(%)$	-9.31	-11.13	-12.59	-14.33	-16.42	-17.16	-17.83
BFEM	1.000	0.922	0.874	0.819	0.756	0.726	0.689
$\varphi/(%)$	0.00	0.00	-0.11	-0.14	-0.51	-0.72	-1.33

① 原书数值有误, 已按原书方法改正

**算例 3** 图 5(a), (b) 所示为柱脚刚接和铰接的三跨五层等截面无侧移框架结构, 梁、柱的弯曲刚度皆为  $EI$ , 梁的长度与柱的高度分别为  $L_b$  和  $L_c$ , 且  $L_b/L_c=4/3$ . 两种方法解计算结果以及精确解, 如表 4 所示. 表中,  $P_{cr}$ =表中数值  $\times EI/L_c^2$ . 从表中结果可看出, 对于柱脚刚接和铰接的多层多跨框架, 每杆取为一个单元

表 4 三跨五层框架的屈曲荷载  $P_{cr}$

柱脚约束	柱脚刚接	柱脚铰接
精确解	2.444	1.541
FEM1	3.843	2.105
$\varphi/(%)$	57.240	36.600
BFEM	2.468	1.549
$\varphi/(%)$	0.980	0.520

的普通杆件有限元 FEM1 的计算结果与精确解相比,误差分别达到 57.24% 和 36.60%,计算结果同样不可用. BFEM 的计算结果精度相当高,与精确解相比,对柱脚铰接和刚接框架的计算误差分别为 0.52% 和 0.98%,表明泡函数有限元法 BFEM 的适应性、稳定性、计算精度和收敛性均很高. 事实上,经作者计算, BFEM 同样适用于有侧移框架的屈曲分析,并且能够获得比无侧移框架更好的精度.

#### 4 结束语

以上算例包括从单层单跨框架到多层多跨框架结构,均有可比较的精确解. 算例计算结果表明,泡函数有限元法对于框架结构的屈曲分析不仅有效,而且具有良好的适应性、稳定性和收敛性. 文中提出的结构稳定分析的泡函数有限单元法,几何和物理概念明确,单元刚度矩阵简洁,适用于任何框架结构的稳定分析. 它克服了普通有限元求解无侧移框架误差大的缺点,高阶多项式泡函数的应用大大减少了结构稳定分析的自由度数,改善了普通有限元的收敛性、稳定性、适应性和求解效率,对大型结构效果尤其明显.

#### 参 考 文 献

- 1 夏志斌,潘有昌. 结构稳定理论[M]. 北京:高等教育出版社,1988. 24
- 2 Chajes A. Principles of structural stability theory[M]. New York: Prentice-Hall Inc, 1974. 8~14, 133~137
- 3 高轩能,万志英,邹银生,等. 杆系结构稳定分析的泡函数有限元法[J]. 南昌大学学报(工科版),1998,20(2):1~5
- 4 刘文国,任文敏,张 维. 用复合有限条——气泡函数法研究加肋壳体稳定性[J]. 清华大学学报(自然科学版),1999,39(11): 61~64
- 5 Weaver W, Johnston P R. Finite elements for structural analysis[M]. New York: Prentice-Hall Inc, 1984. 315~318
- 6 唐家祥,王仕统,裴若娟. 结构稳定理论[M]. 北京:中国铁道出版社,1989. 399~401
- 7 徐次达,华伯浩. 固体力学有限元理论方法及程序[M]. 北京:水利水电出版社,1983. 440~451
- 8 陈 骥. 钢结构稳定理论与设计[M]. 第 2 版. 北京:科学出版社,2003. 134,136

### Buckling Analysis of Frame Structures using Bubble-Function FEM

Gao Xuanneng      Wang Renhui

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

**Abstract** This paper attempts to find an effective approach which is as concise as the conventional bar FEM, and can determine the critical loads of all kinds of frame structures also. According to the characteristics of the bar buckling deformation and the bubble-functions themselves, a new basis function series with bubble-functions is taken as the shape function of a bar element, then a bubble-function finite element method (BFEM) is developed. Bubble-function is a kind of FEM model, which is defined within a single element and is zero on boundaries of the element, but nonzero inside. The use of bubble-functions significantly improves the convergence of finite element analysis, and the BFEM is adaptable to the buckling analysis of all kinds of frame structures. Numerical results show that the BFEM is very suitable, convergent and efficient for stability analysis of structures, especially is a valid method for buckling analysis of the large structures.

**Keywords** frame structures, effective length of column, buckling analysis, FEM, BFEM

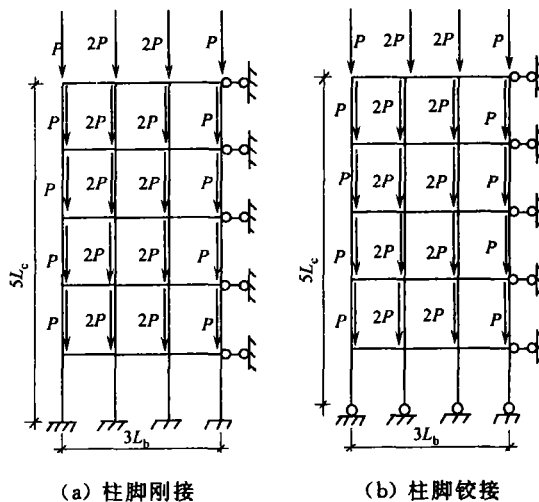


图 5 三跨五层框架