第27卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 27 No. 2
2006年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 2006

文章编号 1000-5013(2006)02-0133-04

一类自由边界问题解的渐近性

王 志 焕

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 讨论一类抛物积微分方程自由边界问题解的渐近性. 利用偏微分方程的渐近性理论, 证明在无界区域上一类抛物积微分方程自由边界问题的解, 以及当时间趋于无穷大时, 收敛于稳态的积微分方程自由边界问题的解. 这一结论可用于解释期权定价中带跳扩散模型, 当执行日期趋于无穷大时, 美式期权价格及最佳实施边界收敛于永久美式期权价格及最佳实施边界.

关键词 跳扩散模型, 抛物积微分方程, 自由边界问题, 收敛性, 美式期权, 定价模型

中图分类号 O 241.82; F 830.9 **文献标识码** A

把 Merton 引入跳扩散模型[1], 在给定的概率空间(Ω, F, P)中, 股票价格$(S_t)_{t\geqslant 0}$是一随机过程. 它满足随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = (\mu - q)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t + \mathrm{d}(\sum_{j=1}^{N_t} U_j),$$

在上式中, μ, q, σ 分别为股价的预期收益率、红利率和波动率, W_t 是 Wiener 过程, $(N_t)_{t\geqslant 0}$是强度为λ的 Poisson 过程, $(U_j)_{j\geqslant 1}$是平方可积取值于$(-1, +\infty)$的独立同分布的随机变量列. 这里强度λ表示跳的频率, 而U_j表示相应跳的幅度. 同时, 假定随机过程$(W_t)_{t\geqslant 0}$, $(N_t)_{t\geqslant 0}$, $(U_j)_{j\geqslant 1}$是相互独立的[2]. 由于考虑带跳扩散模型较传统的扩散模型而言, 方程增加了积分项(非局部项). 美式期权的定价模型是一个抛物积微分方程自由边界问题, 而永久美式期权的定价模型是一个积微分方程自由边界问题. 本文利用偏微分方程的渐近性理论[3], 得到了无界区域上抛物积微分方程自由边界问题的渐近性. 这一结论可以用于解释当执行日期趋于无穷大时, 美式期权价格收敛于永久美式期权价格, 美式期权最佳实施边界收敛于永久美式期权的最佳实施边界.

1 积微分方程自由边界问题解的性质

在跳扩散模型下, 美式看跌期权的价格$V = V(S, \tau)$适合变分不等方程

$$\left.\begin{aligned} &\min\{-LV, V - \varnothing\} = 0, \quad S > 0, \quad 0 \leqslant \tau < T, \\ &V(S, T) = \varnothing(S) = (K - S)^+, \quad S > 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在式(1)中, $K > 0$为敲定价格, S为股票价格, T为执行日期, L为抛物积微分算子. 有

$$LV = \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q - \lambda k)S\frac{\partial V}{\partial S} -$$

$$(r + \lambda)V + \lambda\int_{-1}^{+\infty} V(S(1 + y); \tau)\mathrm{d}N(y),$$

在上式中, $N(y)$是随机变量U_1的分布函数, $k = \int_{-1}^{+\infty} y\mathrm{d}N(y)$. 文[4]通过偏微分方程的理论已证得问题(1)存在唯一解, 其相应的自由边界问题是求$V(S, \tau)$, $s(\tau)$满足

收稿日期 2005-10-03

作者简介 王志焕(1976-), 男, 讲师, 主要从事偏微分方程理论及其应用的研究. E-mail: wangzh12@hqu.edu.cn

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(03QZR9)

$$\left.\begin{array}{l} LV(S,\tau)=0, \quad S>s(\tau), \quad 0\leqslant\tau<T, \\ V(s(\tau),\tau=K-s(\tau), \quad 0\leqslant\tau<T, \\ \dfrac{\partial V}{\partial S}(s(\tau),\tau)=-1, \quad 0\leqslant\tau<T, \\ V(S,T)=(K-S)^+, \quad S>0, \\ V(S,\tau)\to 0(S\to\infty), \quad 0\leqslant\tau<T, \\ V(S,\tau)=(K-S)^+, \quad S\leqslant s(\tau); \\ V(S,\tau)>(K-S)^+, \quad S>s(\tau). \end{array}\right\} \tag{2}$$

对于永久美式看跌期权(即没有到期日的美式看跌期权)$V(S)$,其自由边界问题是求$(V(S),s_\infty)$满足

$$\left.\begin{array}{c} L_\infty V=0, \quad S>s_\infty, \\ V(s_\infty)=K-s_\infty, \quad V'(s_\infty)=-1, \quad V(\infty)=0, \\ V(S)=K-S, \quad S\leqslant s_\infty, \\ V(S)>(K-S)^+, \quad S>s_\infty. \end{array}\right\} \tag{3}$$

在式(3)中,有

$$L_\infty V=\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}S^2}+(r-q-\lambda k)S\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}-(r+\lambda)V+\lambda\int_{-1}^{+\infty}V(S(1+y))\mathrm{d}N(y).$$

命题1[4] 如果$(V(S,\tau;T),s(\tau;T))$和$(V(S),s_\infty)$分别为问题(2),(3)的解,T固定,则有$s(\tau;T)\in C[0,T]$. $s(\tau;T)$关于τ严格单调递增,且$s(\tau;T)\geqslant s_\infty$,$s(T;T)=\overline{K}=\min\{K,S_0\}$,其中$S_0$是方程$qS-rK+\lambda\int_{\frac{K}{S}-1}^{+\infty}[S(1+y)-K]\mathrm{d}N(y)=0$的唯一解,$(K-S)^+\leqslant V(S,\tau;T)<V(S)$.

命题2 若$(V(S,\tau;T),s(\tau;T))$为问题(2)的解,S,τ固定,则$V(S,\tau;T)$关于T单调递增,$s(\tau;T)$关于T单调递减.

命题3 S,τ固定,则极限$\lim\limits_{T\to\infty}V(S,\tau;T)$,$\lim\limits_{T\to\infty}s(\tau;T)$均存在.

2 当时间趋于无穷大时自由边界问题的渐近性

考虑无界区域上的自由边界问题,求$(U(S,t),h(t))$,使得

$$\left.\begin{array}{l} L_1U=-\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\partial^2U}{\partial S^2}+(r-q-\lambda k)S\dfrac{\partial U}{\partial S}-(r+\lambda)U+\lambda\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}U(S(1+y),t)\mathrm{d}N(y)=0, \\ \qquad h(t)<S<\infty, \quad 0<t<\infty, \\ \qquad U(h(t),t)=K-h(t), \quad 0<t<\infty, \\ \qquad \dfrac{\partial U}{\partial S}(h(t),t)=-1, \quad 0<t<\infty, \\ \qquad U(S,0)=(K-S)^+, \quad S>0, \\ \qquad U(S,t)\to 0\ (S\to\infty), \quad 0<t<\infty, \\ \qquad U(S,t)=(K-S)^+, \quad S\leqslant h(t); \\ \qquad U(S,t)>(K-S)^+, \quad S>h(t). \end{array}\right\} \tag{4}$$

由问题(2)的解的存在唯一性,可证得当$0\leqslant\tau<T$时,$U(S,T-\tau)=V(S,\tau;T)$及$h(T-\tau)=s(\tau;T)$. 由$s(\tau)$的性质知道,$h(t)$严格单调递减,且$h(0)=\overline{K}$. $\lim\limits_{t\to\infty}U(S,t)=\lim\limits_{T\to\infty}V(S,\tau;T)$,$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=\lim\limits_{T\to\infty}s(\tau;T)$. 记$\lim\limits_{t\to\infty}U(S,t)=u(S)$,$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=h_0$. 分别考虑如下两个积微分方程定解问题[5],有

$$\left.\begin{array}{c} L_\infty u_1=\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\dfrac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}S^2}+(r-q-\lambda k)S\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}S}-(r+\lambda)u_1+\lambda\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}u_1(S(1+y))\mathrm{d}N(y)=0, \\ h_0<S<\infty, \quad u'_1(h_0)=-1, \quad u_1(\infty)=0, \\ u_1(S)=K-S, \quad S<h_0, \\ u_1(S)>(K-S)^+, \quad S>h_0, \end{array}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &L_\infty u_2=\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}S^2}+(r-q-\lambda k)S\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}S}-(r+\lambda)u_2+\lambda\int_{-1}^{+\infty}u_2(S(1+y))\mathrm{d}N(y)=0,\\ &\qquad h_0<S<\infty,\qquad u_2(h_0)=k-h_0,\qquad u_2(\infty)=0,\\ &\qquad\qquad u_2(S)=K-S,\qquad S<h_0,\\ &\qquad\qquad u_2(S)>(K-S)^+,\qquad S>h_0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

类似于引理 1 的证明，构造 $\varphi(S)=1-\mathrm{e}^{-lS}$. 取 $l>0$，可得 $L_1\varphi<L_1\varphi+r\varphi<0$. t_0 为充分大的数，在 K/D_{t_0} 内构造 $\varphi(S,t)=\frac{\varphi(S)}{\varphi(H_0)}\varepsilon+\frac{K}{\varphi(h_0)}\varphi(S)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}$.

假定 （Ⅰ）$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}\widetilde{N}(z)<\infty$，其中 $\widetilde{N}(z)=N(\mathrm{e}^z-1)$.（Ⅱ）$N(y)$ 为连续函数.

引理 1 在假定（Ⅰ）和（Ⅱ）的情况下，可设 $U(S,t)$，$h(t)$ 为问题(4)的解，$u_1(S)$ 为问题(5)的解，则 $\lim\limits_{t\to\infty}U(S,t)=u_1(S)$.

引理 2 设 $U(S,t)$，$h(t)$ 为问题(4)的解，$u_2(S)$ 为问题(6)的解，则 $\lim\limits_{t\to\infty}U(S,t)=u_2(S)$.

证明 设 $\varphi(S)=1+S^{-\alpha}$，其中 $\alpha>0$ 待定. 记 $D=\{(S,t)\,|\,h(t)<S<\infty,0<t<\infty\}$，$D_\zeta=D\cap\{0<t<\zeta\}$. 易知在 $\overline{D}$ 上，$\varphi(S)$ 关于 S 单减且 $1<\varphi(S)<1+h_0^{-\alpha}$. 在 D 上，取 $0<\beta<r$，则 $L_1\varphi+\beta\varphi<S^{-\alpha}\{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2+(\frac{1}{2}\sigma^2-r+q+\lambda k)\alpha-(r-\beta)+\lambda\int_{-1}^{0}[(1+y)^{-\alpha}-1]\mathrm{d}N(y)\}-(r-\beta)=C(\alpha)$. 由假定（Ⅰ）可知当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，令 $\ln(1+y)=z$，从而有 $\int_{-1}^{0}(1+y)^{-\alpha}\mathrm{d}N(y)=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{d}\widetilde{N}(z)<\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}\widetilde{N}(z)<\infty$. 注意到 $C(0)<0$，只要取充分小的 $\alpha>0$，便有 $L_1\varphi<L_1\varphi+\beta\varphi<0$. 同时注意到 $L_1\varphi<-\beta\varphi<-\beta$.

对于任意 $0<\varepsilon<1$，由假定（Ⅱ）可知存在 $\delta_1>0$. 当 $|y_2-y_1|<\delta_1$ 时，有 $\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}N(y)<\frac{\varepsilon\beta}{\lambda M}$，其中 $M=(1+h_0^{-\alpha})(1+K)+2K$. 由 $u'_1(S)$ 在 $S\geqslant h_0$ 上的连续性可知，存在 $0<\delta<\delta_1h_0$，$\lambda\neq 0$. 若 $\lambda=0$，则不需要上界限定. 因为当 $h(t)-h_0<\delta$ 时，有 $|u'_1(h(t))-u'_1(h_0)|<\alpha\varepsilon\overline{K}^{-\alpha-1}$. 而 $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=h_0$，存在 $t_0>0$. 当 $t>t_0$ 时，$h(t)-h_0<\delta$，又 $u'_1(h_0)=-1=\frac{\partial}{\partial S}U(h(t),t)$. 因此，当 $t>t_0$ 时，$|u'_1(h(t))-\frac{\partial}{\partial S}U(h(t),t)|<\alpha\varepsilon\overline{K}^{-\alpha-1}$.

在 D/D_{t_0} 内构造辅助函数 $\Psi(S,t)=\varphi(S)\varepsilon+K\varphi(S)\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}$. 由此可知，$L_1\Psi=\varepsilon L_1\varphi+K\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}(L_1\varphi+\beta\varphi)<\varepsilon L_1\varphi<-\varepsilon\beta<0$，记 $g(S,t)=\Psi-(u_1-U)$. 则当 $(S,t)\in D/D_{t_0}$，$L_1g(S,t)<-\varepsilon\beta<0$. 由极值原理可得，$g(S,t)$ 不在 D/D_{t_0} 内部取得负的最小值. 事实上，若 $g(S,t)=\Psi-(u_1-U)$ 在 D/D_{t_0} 内部取得负的最小值 $g(S_1,t_1)<0$，$t_1>t_0$，$S_1>h(t_1)$，则

$$L_1g(S_1,t_1)\geqslant-(r+\lambda)g(S_1,t_1)+\lambda\int_{-1}^{+\infty}g(S_1(1+y),t_1)\mathrm{d}N(y).$$

若 $\lambda=0$，显然立得矛盾；若 $\lambda\neq 0$，对于积分项，我们作如下处理. 当 $0\leqslant S_1(1+y)\leqslant h_0$ 时，$g(S_1(1+y),t_1)>0>g(S_1,t_1)$；当 $h_0<S_1(1+y)\leqslant h(t_1)$ 时，$|g(S_1(1+y),t_1)|\leqslant|\Psi(S_1(1+y),t_1)|+|u_1(S_1(1+y))|+|U(S_1(1+y),t_1|\leqslant(1+h_0^{-\alpha})(1+K)+2K=M$. 进而，由 $\frac{h(t_1)-h_0}{S_1}<\frac{\delta}{h_0}<\delta_1$，得

$$\left|\int_{\frac{h_0}{S_1}-1}^{\frac{h(t_1)}{S_1}-1}g(S_1(1+y),t_1)\mathrm{d}N(y)\right|<M\frac{\varepsilon\beta}{\lambda M}.$$

当 $h(t_1)<S_1(1+y)$ 时，$g(S_1(1+y),t_1)\geqslant g(S_1,t_1)$，有

$$\begin{aligned}L_1g(S_1,t_1)&\geqslant-rg(S_1,t_1)+\lambda\Big(\int_{-1}^{\frac{h(h_0)}{S_1}-1}+\int_{\frac{h_0}{S_1}-1}^{\frac{h(t_1)}{S_1}-1}+\int_{\frac{h(t_1)}{S_1}-1}^{+\infty}\Big)[g(S_1(1+y),t_1)-g(S_1,t_1)]\mathrm{d}N(y)>\\&\lambda\int_{\frac{h_0}{S_1}-1}^{\frac{h(t_1)}{S_1}-1}g(S_1(1+y),t_1)\mathrm{d}N(y)>-\varepsilon\beta.\end{aligned}$$

这与 $L_1g(S_1,t_1)<-\varepsilon\beta$ 矛盾.

现在考虑 D/D_{t_0} 的边界. 当 $S=h(t)$，$t>t_0$ 时，$\varphi'(S)=-\alpha S^{-\alpha-1}$ 单增，又 $h(t)<\overline{K}$，则有

$$\varphi'(h(t)) < -\alpha\overline{K}^{-\alpha-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial S}\Psi(h(t),t) = (\varepsilon + K\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)})\varphi'(h(t)) < -\alpha\varepsilon\overline{K}^{-\alpha-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial S}\Psi(h(t),t) - (u'_1(h(t)) - \frac{\partial}{\partial S}U(h(t),t)) < 0,$$

故 $\Psi-(u_1-U)$不在 $S=h(t)$上取得极小值. 当 $t=t_0$ 时,$\Psi(S,t_0)>K>u_1(S)>u_1(S)-U(S,t_0)$,即 $\Psi-(u_1-U)>0$. 由于 $\Psi(S,t)>\varepsilon$,故 $\lim\limits_{S\to\infty}\Psi(S,t)\geqslant\varepsilon$, $\lim\limits_{S\to\infty}[\Psi-(u_1-U)]>0$. 这样由极值原理可得,当 $(S,t)\in\overline{D}/D_{t_0}$,有 $u_1(S)-U(S,t)\leqslant\Psi(S,t)$. 即 $u_1(S)-U(S,t)\leqslant\varphi(S)\varepsilon+K\varphi(S)\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)}\leqslant(1+h_0^{-\alpha})(\varepsilon+\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)})$. 同理可得,$U(S,t)-u_1(S)\leqslant(1+h_0^{-2})(\varepsilon+\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)})$. 由 ε 的任意性及$\lim\limits_{t\to\infty}U(S,t)=u_1(S)$可知,它关于 S 一致.

应用引理 1 及引理 2,我们有

引理 3 设$(V(S,\tau;T),s(\tau;T))$,$(V(S),s_\infty)$分别为问题(2),(3)的解,则

$$\lim_{T\to\infty}V(S,\tau;T) = V(S), \qquad \lim_{T\to\infty}s(\tau;T) = s_\infty.$$

证明 $\lim\limits_{T\to\infty}V(S,\tau;T)=\lim\limits_{t\to\infty}U(S,t)=u_1(S)=u_2(S)=u(S)$, $\lim\limits_{T\to\infty}s(\tau;T)=\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=h_0$. 由 u_1, u_2 的定义可知,$(u(S),h_0)$为问题(3)的解. 再由问题(3)的解的唯一性可知,$V(S)=u(S)$,$s_\infty=h_0$. 这样命题成立.

3 结束语

根据上述渐近性结论,我们可以利用永久美式期权的价格和最佳实施边界,对美式期权及其最佳实施边界进行估计并作渐近展开. 这在金融上是有意义的. 此外,我们还得到相应的误差估计及数值算例,限于篇幅,本文从略.

本文得到同济大学边保军教授的指导,特此致谢.

参 考 文 献

1 Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. J of Financial Economics, 1976, (3): 125～144

2 Willmott P. Derivatives: The theory and practice of financial engineering[M]. London: John Wiley&Sons Ltd, 1999. 325～337

3 Friedman A. 抛物型偏微分方程[M]. 北京:科学出版社, 1984. 186～223

4 Phan H. Optmal stopping, free boundary and Amertcan optlon in a jumpdiffusion model[J]. Appl Math Opt, 1996, 35: 145～164

5 代晓亮,边保军,袁桂秋. 美式期权当执行日期趋于无穷大时的渐近分析[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2005, 33(4): 545～549

Critical Analysis for the Solution of Free Doundary Problem

Wang Zhihuan

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract The intent of this study is to discuss the critical property of a free boundary problem of a parabolic integro-differential equation. Using the critical theory of partial differential equation, we prove that the solution of a free boundary problem of parabolic integro-differential equation converges to the solution of a free boundary problem of integro-differential equation in limitless region when time run to infinite. Using this result, we can explain that the price and optimal exercise boundary of American option converge to the price and optimal exercise boundary of perpetual American option when the expiry date runs to infinite in a jump-diffusion model.

Keywords jump-diffusion model, parabolic integro-differential equation, free boundary problem, convergence property