第 27 卷 第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 27 No. 2
2006 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2006

文章编号 1000-5013(2006)02-0130-03

具有共同刻划特征的几类紧性和近似紧性

周景新[①]　　周宇鹏[②]

(① 北华大学理学院，吉林 吉林 132033；② 哈尔滨工业大学计算中心，黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要 对几类具有某种覆盖 $\mathscr{P}$ 都有子覆盖，都有局部有限某种加细定义空间的各类紧性和仿紧性的空间类进行讨论. 研究它们之间的内在联系，并且补充一些空间类.

关键词 WS-闭空间，特征空间，近似紧空间，S-闭空间

中图分类号 O 189.11　　**文献标识码** A

仿紧性是可度量性和紧性的共同推广，仿 WS-闭性又是仿紧性、S-闭性和 WS-闭性的共同推广[1]. 近些年来，为了适应不同目的而定义和发现各色各样的拓扑空间，都是为解决各类问题对仿紧性和可度量性的推广. 自从 S-闭空间[2]引入以来，特别是由于 βN 是 S-闭空间，更加引起人们的关注，得到许多好的结果. 对于原有或新定义的各种具有共同刻划特征，人们在各类紧性的分类研究的基础上，研究它们之间的内部刻划. 本文给出它们内在联系的同时，又给出了特征性等概念，并且对近似紧空间与分离性方面进行讨论，研究了它们的内在联系.

1 基本知识[3,4]

X 为拓扑空间，$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是由 X 的子集组成的覆盖，如果 $\forall A\in\mathscr{A}$，都存在 $B\in\mathscr{B}$，使得 $A\subset B$，则称 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{B}$ 的一个加细(提炼). 如果 X 的任一开覆盖都有局部有限的开加细，空间 X 称为仿紧的. 紧空间一定是仿紧空间；反之，不成立. 如果 X 的任一正则闭覆盖都有有限子覆盖，空间 X 称为 S-闭的. 如果 X 的任一正则闭覆盖都有局部有限的正则闭加细，空间 X 称为仿 S-闭的. S-闭空间一定是仿 S-闭的；反之，不成立. 如果 X 的每一正则开覆盖都有有限子覆盖，空间 X 称为近似紧的. 如果 X 的每一正则开覆盖都有局部有限的开加细，空间 X 称为近似仿紧的. 如果 X 的每个半开覆盖都有有限子覆盖，空间 X 称为 S-紧的. 空间 X 的开覆盖 $\mathscr{A}$ 称为 su 开覆盖，是指在 X 中存在 $\mathscr{A}$ 的正则闭加细. 如果 X 的每一 su 开覆盖都有有限子覆盖，空间 X 称为 WS-闭空间. 如果每 su-开覆盖都有局部有限开加细，空间 X 称为仿 WS-闭空间(仿 S 紧空间，为区别定义的仿 S-紧空间而另命名).

2 具有共同刻划特征的空间[5]

定义 1 如果 X 的每一半开覆盖都有局部有限的半开加细，拓扑空间 X 称为仿 S-紧的.

定义 2 如果每个正则开覆盖都有局部有限正则开加细，拓扑空间 X 称为仿近似紧的.

定义 3 如果拓扑空间任意覆盖 $\mathscr{A}$ 的每一个局部有限加细 $\mathscr{B}$ 都是有限集族，则称 X 具有特征性空间.

显然，S-紧空间一定是仿 S-紧空间；近似紧空间一定是仿近似紧空间；仿近似紧空间一定是近似仿紧空间.

定理 1 具有特征性的仿紧空间 X 是紧空间.

收稿日期 2005-10-12

作者简介 周景新(1947-)，男，副教授，主要从事代数和拓扑方面的研究. E-mail: liujiecao@hotmail.com

基金项目 国家自然科学基金资助项目(10471021)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明　设 $\mathscr{A}$ 为的 X 任一开覆盖，由于 X 是仿紧的，所以存在覆盖 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的局部有限开加细. 又由于 X 是具有特征性质的空间，所以 $\mathscr{B}$ 为有限覆盖.

由于 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细，所以 $\forall B\in\mathscr{B}$，存在 $A_B\in\mathscr{A}$，使 $B\subset A_B$. 那么，集族 $\{A_B|B\in\mathscr{B}\}\subset\mathscr{A}$ 且是有限开子族，故 X 是紧空间.

同样，我们可以获得下面结果

定理2　具备特征性的仿 S-闭(仿 S-紧、仿近似紧、仿 WS-闭)空间都是 S-闭空间(S-紧空间、近似紧空间、WS-闭空间).

定理3　具有特征性的近似仿紧空间 X 是近似紧空间.

证明　设 $\mathscr{A}$ 为 X 的任意正则开覆盖，那么由于 X 是近似仿紧空间，所以有 $\mathscr{A}$ 的局部有限开加细 $\mathscr{B}$. 由于 X 是特征空间，所以 $\mathscr{B}$ 是有限的. 那么任何 $B\in\mathscr{B}$，都是 $A_B\in\mathscr{A}$，使 $B\subset A_B$，集族 $\{A_B|B\in\mathscr{B}\}$ 是有限的，且是正则开覆盖 $\mathscr{A}$ 的子覆盖，因此 X 是近似紧空间.

定义4　拓扑空间 X 称为具有子加细性，是指 X 的任一覆盖 $\mathscr{A}$ 都是一个子族 $\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$，且是 $\mathscr{A}$ 的局部有限加细. 显然，下面结果成立.

定理4　如果拓扑空间具有子加细性，那么仿 S-紧空间是仿紧空间，仿紧空间是仿近似紧空间.

3　近似紧空间与分离性[6,7]

定义5　拓扑空间 X 的子集 y 称为 X 近似紧子集，指的是 y 在 X 中的每一正则开覆盖 $\mathscr{A}$，都有有限子覆盖 $\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$，使得 $y\subset\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}_1}A$.

正则开集 $Q=Q^{-0}$，正则闭集 $P=P^{0-}$；正则开集 Q 和正则闭集 P 是互补关系，即 $\sim Q$ 是正则闭集，$\sim P$ 是正则开集. P 为正则闭集当且仅当 P 是开集的包，Q 为正则开集当且仅当 Q 是闭集的核. 有限多个正则开集的交是正则开集，但有限个正则开集的并未必都是正则开集，同样有限个正则闭集的交也未必都是正则闭集. 下面，我们给出几个重要的引理：

引理1　拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中的任意 $U,V\in\mathscr{T}$，$U\cap V=\varnothing\Leftrightarrow U^{-0}\cap V^{-0}=\varnothing$.

引理2　拓扑空间 X 为 T_2 空间当且仅当对 $\forall x,y\in X$，且 $x\neq y$，存在正则开集 U,V，使得 $x\in U$，$y\in V$，$U\cap V=\varnothing$.

证明　因为 X 为 T_2 空间，所以对任何 $x,y\in X$，$x\neq y$，都有 x 和 y 的开邻域 U_1 和 V_1，使得 $U_1\cap V_1=\varnothing$. 那么，$U_1^{-0}\cap V^{-0}=\varnothing$. 又 $x\in U_1\subset U_1^-$，所以 $x\in U_1^0=U_1\subset U_1^{-0}=U$，则 U 是 x 的正则开邻域. 同样，可以得到的正则开邻域 $V=V_1^{-0}$ 且 $U\cup V=\varnothing$. $\Leftarrow$ 若 x,y 分别有正则开邻域 U 和 V，且 $U\cap V=\varnothing$，由于 $U,V\in\mathscr{T}$，所以 X 为 T_2 空间.

推论1　拓扑空间 X 为 T_3 空间，当且仅当对任意 X 中的闭集 F 和 $x\in X$，$x\notin F$ 的点都分别有正则开邻域 U 和 V，使 $U\cap V=\varnothing$.

推论2　拓扑空间 X 为 T_4 空间，当且仅当对任意 X 中的无交闭集 F_1,F_2 都存在分别有开正则开邻域 U 和 V，使 $U\cap V=\varnothing$.

定理5　设 X 为 T_2 空间，Y 为 X 的任意近似紧子集，$x\in X$ 且 $x\notin Y$，则 x 和 Y 分别有正则开邻域 U 和 V，使 $U\cap V=\varnothing$.

证明　因为 X 是 T_2 空间，因此对任何 $y\in Y$，都有 x 和 y 的正则开邻域 U_x 和 V_y，使 $U_x\cap V_y=\varnothing$. 记满足上述条件的集族 $\mathscr{A}=\{V_y|y\in Y,V_y$ 为 X 中含 y 的正则开集$\}$，那么 $\mathscr{A}$ 是 Y 在 X 中的一个正则开覆盖. 由于 Y 是 X 的近似紧子集，故有有限子覆盖 $\mathscr{A}_1=\{V_{y_1},V_{y_2},\cdots,V_{y_n}\}$ 及相应正则开集为 x 邻域的有限集族 $\mathscr{B}_1=\{U_{y_1},U_{y_2},\cdots,U_{y_n}\}$，满足 $U_{y_i}\cap V_{y_i}=\varnothing(i=1,2,\cdots,n)$.

令 $V_*=\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{y_i}$，$U=\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_{y_i}(i=1,2,\cdots,n)$，那么，$Y\subset V_*$ 为 Y 的开邻域，$U\subset U_{y_i}$ 且 $U\cap V_{y_i}=\varnothing$，$U$ 为 x 的正则开邻域. 所以，$U\cap V_*=\varnothing$，又 $V_*^{-0}\cap U^{-0}=V_*^{-0}\cap U=\varnothing$，令 $V_*^{-0}=V$，则 V 为 Y 的正则开邻域. 因此，有 x 和 y 的正则开邻域 U 和 V，使得 $U\cap V=\varnothing$.

推论3　拓扑空间 X 每一近似紧子集 A 都是 X 中的闭集.

证明　任何 $x\notin A$，则分别有 x 和 A 的正则开集 U 和 V，使 $U\cap V=\varnothing$. 由于 $A\subset V$，所以 $U\cap A=$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\varnothing$，$x\notin\overline{A}$ 即 $\overline{A}\subset A$，又 $A\subset\overline{A}$，$A=\overline{A}$，故 A 为 X 中闭集.

推论 4 近似紧空间 X 的任意正则闭子集都是 X 中近似紧子集.

证明 令 Y 是 X 中的正则闭子集，$\mathscr{A}$ 为 Y 在 X 中的任一正则开覆盖，那么 $\mathscr{A}\cup\{\sim Y\}$ 是 X 中的一个正则开覆盖. 由于 X 是近似紧空间，所有 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\cup\{\sim Y\}$ 是 X 的子覆盖，显然 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 Y 在 X 中的 $\mathscr{A}$ 的一个有限子覆盖，因此 Y 是 X 的近似紧子集. 命题成立.

推论 5 设 X 为 T_4 拓扑空间，则 X 中任意两个无交的近似紧子集 A 和 B，都有正则开邻域 U 和 V，使得 $U\cap V=\varnothing$.

这是因为 A 和 B 是闭集，那么由引理显然成立.

推论 6 设 X 为 T_3 拓扑空间，则 X 中任意近似紧子集 A 和 $x\in X$，且 $x\notin A$，都有正则开邻域 U 和 V，使得 $U\cap V=\varnothing$.

这是因为 A 是闭集，所以由引理显然成立，另外由于 T_3 空间是 T_2 空间，由定理 1 显然可证.

定理 6 拓扑空间 X 为 T_2 空间，如果 A 和 B 为 X 中无交的近似紧子集，则 A 和 B 分别有正则开邻域 U 和 V，使得 $U\cap V=\varnothing$.

证明 由于 X 为 T_2 空间，所以对任何 $x\in A$ 和 B，都有正则开邻域 U_x 和 V_x，使得 $U_x\cap V_x=\varnothing$. 令 $\mathscr{A}=\{U_x\mid x\in A$，且 U_x 为 x 在 X 中正则开邻域$\}$，由于 A 是近似紧子集，所以有 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖 $\mathscr{A}_1=\{A_{x_1},A_{x_2},\cdots,A_{x_n}\}$ 和相应的 $\mathscr{B}_1=\{B_{x_1},B_{x_2},\cdots,B_{x_n}\}$. 每个 B_{x_i} 为 B 的正则开邻域，且 $A_{x_i}\cap B_{x_i}=\varnothing(i=1,2,\cdots,n)$.

令 $U_*=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_{x_i}$ 为 A 的开邻域，$V=\bigcap\limits_{i=1}^{n}B_{x_i}$ 为 B 的正则开邻域. 那么，$U_*\cap V=\varnothing$，$U_*^{-0}\cap V^{-0}=U_*^0\cap V=\varnothing$，又 $A\subset U_*\subset U_*^-$，$A\subset U_*=U_*^0\subset U_*^{-0}$

令 $U_*^{-0}=U$，则 U 为正则开集，且是 A 的邻域，满足 $U\cap V=\varnothing$.

参 考 文 献

1 李进金. 仿紧空间和 S-闭空间的共同推广[J]. 纯粹数学与应用数学，1999，5(2)：62～64

2 王国俊. S-闭空间的性质[J]. 北京：数学学报，1981，24(1)：55～63

3 胡庆平. S-覆盖及有关的空间[J]. 西北大学学报(自然科学版)，1986，16(2)：9～13

4 陈必胜. 仿 S-闭空间[J]. 数学研究与评论，1985，(3)：1～5

5 李厚源. 半拓扑子集的一些性质[J]. 数学研究与评论，1991，11(3)：355～358

6 陈清煊. 关于 S-闭空间、近似紧集和 S-内核[J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，1986，10(1)：4～12

7 马跃超，杨姗姗. S-紧性与 S-分离性[J]. 哈尔滨工业大学学报(自然科学版)，2003，35(6)：689～690

Engraving the Character on Several Kinds of Compact and Approximate Compact Space

Zhou Jingxin[①] Zhou Yupeng[②]

(① College of Science, Beihua University, 132033, Jilin, China;

② Center of Computer, Harbin Institute of Technology, 150001, Harbin, China)

Abstract We consider several kinds of compact and approximate compact spaces that possess certain subcovers, local finite thinning property. Several inside relations are obtained.

Keywords WS-closed space, characteristic space, approximate compact space, S-closed space

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net