第27卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 27 No. 2
2006年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 2006

文章编号 1000-5013(2006)02-0126-04

一类二阶中立型泛函微分方程周期解的存在性

张 莉 王全义

(华侨大学数学系,福建 泉州 362021)

摘要 利用一些分析技巧及 k-集压缩算子的抽象连续性原理,研究一类二阶中立型泛函微分方程周期解的存在性,得到保证该类方程周期解存在的充分条件.

关键词 中立型泛函微分方程,周期解,存在性,k-集压缩算子

中图分类号 O 175 **文献标识码** A

近年来,对泛函微分方程周期解存在性问题的研究非常活跃[1,2],但对二阶泛函微分方程周期解的存在性问题研究,大多局限带有常系数或具有常量时滞的泛函微分方程.文[3]研究的方程$[x(t)+cx(t-\sigma)]''+g(t,x(t-\tau))=p(t)$,其中 c,σ,τ 均为常数.文[4]研究的方程 $x''(t)+g(x(t-\tau))=p(t)$,其中 $\tau\geqslant 0$ 为常数,$p(t)$以 2π 为周期,且$\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{d}t=0$. 然而,对于具有变系数 $c(t)$及具有多个滞量函数 $\tau(t)$的二阶中立型泛函微分方程周期解的存在性问题,却很少有人研究过.本文研究二阶微分方程

$$[x(t)+c(t)x(t-\tau(t))]''+g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))=p(t) \tag{1}$$

的周期解的存在性问题. 其中 $c(t),\tau(t)\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$;$\tau_1(t),\tau_2(t)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$,且均以 $T(T>0)$为周期. $1-\tau'(t)>0$, $p(t)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0$. $g(t,x_1,x_2,x_3)$是 $\mathbf{R}^4$ 上的实连续函数,且对 t 是 T 周期的. 利用一些分析技巧及 k-集压缩算子的抽象性连续原理,我们得到了一些关于式(1)周期解存在性的新结果. 本文的结果还可以进一步推广到更高阶的中立型泛函微分方程.

1 预备知识

定义1 设 X 是一个 Banach 空间,D 是 X 的有界子集. 令 $\alpha_X(D)=\inf\{\delta>0\mid D$ 可表示为有限个集合的并:$D=\bigcup_{i=1}^n D_i$,且每个 D_i 的直径 $\mathrm{diam}_X(D_i)\leqslant\delta\}$,则称 α_X 为 D 非紧性测度或 Kuratowski 距离.

定义2 设 X,Y 均是 Banach 空间,$D\subset X$,算子 $N:D\to Y$ 是连续且有界. 如果存在常数 $k\geqslant 0$,对任何有界集 $E\subset D$,有 $\alpha_Y(N(E))\leqslant k\alpha_X(E)$,则称 N 是 D 上的 k-集压缩算子[5,6].

如果 $L:\mathrm{dom}\,L\subset X\to Y$ 是指标为0的 Fredholm 算子,由文[5]可以知道,对任何有界集 $B\subset\mathrm{dom}\,L$, $\sup\{r\geqslant 0\mid r\alpha_X(B)\leqslant\alpha_Y(L(B))\}$是存在的. 因而我们可定义 $l(L)=\sup\{r\geqslant 0\mid r\alpha_X(B)\leqslant\alpha_Y(L(B))$,对任何有界集 $B\subset\mathrm{dom}\,L\}$.

引理1[7] 设 $L:\mathrm{dom}\,L\subset X\to Y$ 是指标为0的 Fredholm 算子,$y\in Y$ 是一固定点. 假设 $N:\bar{\Omega}\to Y$ 是 k-集压缩算子,$k<l(L)$,$\Omega\subset X$ 是有界的且关于 $0\in\Omega$ 对称的开子集,并且满足:(1) $Lx\neq\lambda Nx+\lambda y$, $\forall x\in\partial\Omega$, $\forall\lambda\in(0,1)$;(2) $[QNx+Qy,x]\cdot[QN(-x)+Qy,x]<0$, $\forall x\in\partial\Omega\cap\ker L$,其中$[\cdot,\cdot]$是 $Y\times X$ 的某双线性泛函 $Q:Y\to\mathrm{coker}\,L$ 是投影算子. 那么,至少存在一个 $x\in\bar{\Omega}$,满足 $Lx=Nx+y$.

收稿日期 2005-09-12

作者简介 张 莉(1978-),女,硕士研究生,主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究;通信作者:王全义(1955-),男,教授,E-mail:qywang@hqu.edu.cn

基金项目 福建省自然科学基金资助项目(Z0511026)

2 主要结果及其证明

设 $X=\{x\mid x(t)\in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}):x(T+t)=x(t)\}$，$Y=\{x\mid x(t)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}):x(T+t)=x(t)\}$，$Z=\{x\mid x(t)\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}):x(T+t)=x(t)\}$. 定义 $\|x\|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$，$\|x\|_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\{\|x\|_0,\ \|x'\|_0\}$，$\|x\|_2=\max\{\|x\|_0,\ \|x'\|_0,\|x''\|_0\}$. 则 X,Z,Y 分别在 $\|x\|_2$，$\|x\|_1$，$\|x\|_0$ 之下构成 Banach 空间.

定义算子 $L:X\to Y$，有 $Lx=x''$，$\forall x\in X$. 又定义算子 $N:X\to Y$，有 $Nx(t)=-g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))-c''(t)x(t-\tau(t))-[2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)]x'(t-\tau(t))-c(t)(1-\tau'(t))^2x''(t-\tau(t))$，$\forall x\in X$. 则方程(1)转化为算子方程 $Lx=Nx+p(t)$. 在本文中，我们采用以下记号，即

$$|x(t)|_0=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|,\qquad |x(t)|_m=\min_{t\in[0,T]}|x(t)|,$$

$$a=|c''(t)|_0+|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0+|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0,$$

$$h=\frac{T^2|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}+\frac{T|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}+\frac{|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m},$$

其中 $f(t)$是 $t-\tau(t)$的反函数.

定理　设以下 4 个条件均成立.（A_1）$K=a<1$，$h<1$.（A_2）存在常数 $\alpha>0$，当$|x|\geqslant\alpha$ 时，$\forall(t,y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$，$g(t,x,y,z)>0$.（$A_3$）存在常数 $\beta>0$，当 $x\geqslant\alpha$ 时，$\forall(t,y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$，$g(t,x,y,z)\leqslant\beta$.（$A_4$）存在以 T 为周期的非负连续函数 $b_1(t)$，$b_2(t)$，使得当$|x|\leqslant\alpha<|y|+|z|$，$\forall t\in R$ 时，$|g(t,x,y,z)|\leqslant b_1(t)|x|+b_2(t)$. 则方程(1)至少存在一个 T-周期解.

在证明此定理之前，我们先证明以下一些引理.

引理 2[8]　L 是指标为 0 的 Fredholm 算子，并且满足 $l(L)\geqslant1$.

引理 3　在定理 1 的条件下，设 Ω 是 X 的任一有界子集，则 $N:\bar{\Omega}\to Y$ 是 k-集压缩的，且 $k<1$. 因篇幅限制，证明从略.

引理 4　在定理的条件下，存在常数 $M>0$，使得微分方程

$$Lx=\lambda Nx+\lambda p(t),\qquad \lambda\in(0,1)\tag{2}$$

的任一解 $x(t)\in X$，均满足 $\|x\|_2<M$.

证明　设 $x(t)\in X$ 是式(2)的任一解，则 $x''=\lambda Nx+\lambda p(t)$，即 $x''(t)+\lambda[x(t)+c(t)x(t-\tau(t))]''=\lambda p(t)-\lambda g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))+\lambda x''(t)$. 对上式从 0 到 T 积分，则有

$$\int_0^T g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))\mathrm{d}t=0.\tag{3}$$

记 $E_1=\{t\in[0,T]:x(t)>\alpha\}$；$E_2=\{t\in[0,T]:x(t)<-\alpha\}$；$E_3=\{t\in[0,T]:|x(t)|\leqslant\alpha,|x(t-\tau_1(t))|+|x'(t-\tau_2(t))|\leqslant\alpha\}$；$E_4=\{t\in[0,T]:|x(t)|\leqslant\alpha,|x(t-\tau_1(t))|+|x'(t-\tau_2(t))|>\alpha\}$. 由定理的条件可知，$\int_{E_4}g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))\mathrm{d}t\leqslant\alpha|b_1|_0T+|b_2|_0T\triangleq\gamma T$. 则有$\int_{E_2}g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))\mathrm{d}t=-(\int_{E_1}+\int_{E_3}+\int_{E_4})g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))\mathrm{d}t-\geqslant-\beta T-\zeta T-\gamma T$. 其中，$\zeta=\max\{|g(t,x,y,z)|:t\in[0,T],|x|\leqslant\alpha,|y|+|z|\leqslant\alpha\}$. 从而有

$$\int_0^T|g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))|\mathrm{d}t=$$

$$(\int_{E_1}+\int_{E_2}+\int_{E_3}+\int_{E_4})|g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))|\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\beta T+(\beta T+\zeta T+\gamma T)+\zeta T+\gamma T=2(\beta T+\zeta T+\gamma T).$$

由条件(A_2)及式(3)可知，必存在 $t_0\in[0,T]$，使得$|x(t_0)|\leqslant\alpha$. 从而对 $\forall t\in[0,T]$，有

$$|x(t)|\leqslant|x(t_0)|+|\int_{t_0}^t|x'(t)|\mathrm{d}t|\leqslant\alpha+\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t.\tag{4}$$

又由于 $x(0)=x(T)$，所以必存在 $t_1\in[0,T]$，使得$|x'(t_1)|=0$. 因此，对 $\forall t\in[0,T]$，有

$$|x'(t)| \leqslant |x'(t_1)| + \left|\int_{t_1}^{t} |x''(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \alpha + \int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

并且,我们又可由上述两个不等式得到

$$\int_0^T |x(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \alpha T + T^2\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^T |x'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant T\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

由于 $x''=\lambda Nx+\lambda p(t)$,所以

$$\begin{aligned} |x''(t)| \leqslant & |g(t,x(t),x(t-\tau_1(t)),x'(t-\tau_2(t)))| + |c''(t)|_0\,|x(t-\tau(t))| + \\ & |2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0\,|x'(t-\tau(t))| + \\ & |c(t)(1-\tau'(t))^2|_0\,|x''(t-\tau(t))| + |p(t)|_0. \end{aligned} \tag{7}$$

对上式从 0 到 T 积分,可得

$$\begin{aligned} \int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant & 2(\beta T+\zeta T+\gamma T) + |c''(t)|_0\int_0^T |x(t-\tau(t))|\,\mathrm{d}t + \\ & |2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0\int_0^T |x'(t-\tau(t))|\,\mathrm{d}t + \\ & |c(t)(1-\tau'(t))^2|_0\int_0^T |x''(t-\tau(t))|\,\mathrm{d}t + |p(t)|_0 T. \end{aligned} \tag{8}$$

由 $\tau(0)=\tau(T)$ 及 $x(t),x'(t),x''(t)$ 的周期性,可得

$$\int_0^T |x(t-\tau(t))|\,\mathrm{d}t = \int_{-\tau(0)}^{T-\tau(T)} \frac{|x(t)|}{1-\tau'(f(t))}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{|1-\tau'(f(t))|_m}\int_0^T |x(t)|\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^T |x'(t-\tau(t))|\,\mathrm{d}t = \int_{-\tau(0)}^{T-\tau(T)} \frac{|x'(t)|}{1-\tau'(f(t))}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{|1-\tau'(f(t))|_m}\int_0^T |x'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^T |x''(t-\tau(t))|\,\mathrm{d}t = \int_{-\tau(0)}^{T-\tau(T)} \frac{|x''(t)|}{1-\tau'(f(t))}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{|1-\tau'(f(t))|_m}\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t.$$

所以,由式(6),(8)及上述不等式可得

$$\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2(\beta T+\zeta T+\gamma T) + \frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\alpha T + |p(t)|_0 T + h\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t.$$

因此,有

$$(1-h)\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2(\beta T+\zeta T+\gamma T) + \frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\alpha T + |p(t)|_0 T,$$

即

$$\int_0^T |x''(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2(\beta T+\zeta T+\gamma T)}{1-h} + \frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\frac{\alpha T}{1-h} + \frac{|p(t)|_0 T}{1-h}. \tag{9}$$

从式(4),(5)和式(9)可得

$$|x(t)| \leqslant \alpha + \frac{2T(\beta T+\zeta T+\gamma T)}{1-h} + \frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\frac{\alpha T^2}{1-h} + \frac{|p(t)|_0 T^2}{1-h} \triangleq M_1,$$

$$|x'(t)| \leqslant \frac{2T(\beta T+\zeta T+\gamma T)}{1-h} + \frac{|c''(t)|_0}{|1-\tau'(f(t))|_m}\frac{\alpha T}{1-h} + \frac{|p(t)|_0 T}{1-h} \triangleq M_2.$$

显然,正常数 M_1,M_2 与 λ 无关.从而有

$$\|x\|_0 = \max_{t\in[0,T]} |x(t)| \leqslant M_1, \qquad \|x'\|_0 = \max_{t\in[0,T]} |x'(t)| \leqslant M_2. \tag{10}$$

记 $d=\max\{|g(t,x,y,z)|: t\in[0,T], |x|\leqslant M_1, |y|\leqslant M_1, |z|\leqslant M_2\}$.则由式(7)可得

$$\begin{aligned} |x''(t)| \leqslant & d + |c''(t)|_0 M_1 + |2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0 M_2 + \\ & |c(t)(1-\tau'(t))^2|_0\,|x''(t-\tau(t))| + |p(t)|_0, \end{aligned}$$

即 $\|x''\|_0 \leqslant d+|c''(t)|_0 M_1+|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0 M_2+|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0\,\|x''\|_0+|p(t)|_0$. 又由于 $a<1$,从而 $|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0<1$,所以

$$\|x''(t)\|_0 \leqslant \frac{d+|c''(t)|_0 M_1+|2c'(t)(1-\tau'(t))-c(t)\tau''(t)|_0 M_2+|p(t)|_0}{1-|c(t)(1-\tau'(t))^2|_0} \triangleq M_3. \tag{11}$$

显然,正常数 M_3 与 λ 无关.记 $M=\max\{M_1+1,M_2+1,M_3+1,\alpha+1\}$,则正常数 M 与 λ 无关.于是,由式(10),(11)可得,对于方程 $x''=\lambda Nx+\lambda p(t)$,$(\in(0,1))$的任一解 $x(t)\in X$,均满足 $\|x\|_2<M$.

定理的证明　由本节前部分的说明可知，要证明方程(1)至少存在一个 T-周期解，等价于证明算子方程 $Lx=Nx+p(t)$ 在 X 中至少存在一个解 x. 因此，只需要证明算子方程 $Lx=Nx+p(t)$ 满足引理 1 的全部条件即可.

事实上，令 $\Omega=\{x\in X:\|x\|_2<M\}$，于是由定理的条件可知引理 2 成立. 因此，$N:\bar{\Omega}\to Y$ 是 k-集压缩的. 又由引理 3 可知引理 1 的条件(1)成立.

现在，我们在 $Y\times X$ 上定义一个双线性泛函 $[\cdot,\cdot]:[y,x]=\int_0^T y(t)x(t)\mathrm{d}t$，并定义投影算子 Q：$Y\to \mathrm{coker}\,L:Qy=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t$，$\forall y\in Y$. 对于 $\forall x\in\partial\Omega\cap\ker L$，有 $x=M$ 或 $x=-M$. 因此

$$[QNx+Qp,x][QN(-x)+Qp,x]=$$
$$M^2\int_0^T(QNx+Qp)\mathrm{d}t\cdot\int_0^T(QN(-x)+Qp)\mathrm{d}t=$$
$$M^2\int_0^T g(t,M,M,0)\mathrm{d}t\cdot\int_0^T g(t,-M,-M,0)\mathrm{d}t<0.$$

即引理 1 中的条件(2)得到满足，所以引理 1 中的所有条件都满足. 从而算子方程 $Lx=Nx+p(t)$ 中在 x 中至少存在一个解，即方程(1)至少存在一个 T-周期解.

3　结束语

目前，对于具有变系数及多个可变时滞的二阶中立型泛函微分方程，其周期解存在性的结果还很少，因此，我们将继续这方面问题的研究.

参　考　文　献

1　方聪娜，王全义. 一类具有时滞的微分系统的周期解[J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2003，24(2)：119～124

2　韩　飞，王全义. 具状态依赖时滞微分方程的周期正解[J]. 华侨大学学报(自然科学版)，2005，26(4)：357～360

3　王根强，燕居让. 二阶非线性中立型泛函微分方程周期解的存在性[J]. 数学学报，2004，47(3)：379～384

4　黄先开，向子贵. 具有时滞的 Duffing 型方程 $\ddot{x}+g(x(t-\tau))=p(t)$ 的 2π 周期解[J]. 科学通报，1994，39(3)：201～203

5　Gains R E，Mawhin J L. Coincidence degree and nonlinear differential equation[M]. Berlin：Springer-Verlag，1977. 1～100

6　郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科学技术出版社，2002. 193～194

7　Petryshyn W V，Yu Z S. Existence theorems for higher order nonlinear periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Anal，1982，9：943～969

8　Liu Zhongdong，Mao Yiping. Existence theorem for periodic solutions of higher order nonlinear differential equations [J]. J Math Anal Appl，1997，216：481～490

On the Existence of Periodic Solutions for the Second Order Neutral Functional Differential Equation

Zhang Li　　Wang Quanyi

(Department of Mathematics，Huaqiao University，362021，Quanzhou，China)

Abstract　In this paper，the existence of periodic solutions for a class of second order neutral functional differential equations is investigated by using some analytical techniques and the abstract continuation theory of k-set contractive operator. One sufficient condition is obtained.

Keywords　neutral functional differential equation，periodic solution，existence，k-set contraction operator