第 27 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 27　No. 2
2006 年 2 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2006

文章编号　1000-5013(2006)02-0119-04

闭区间上 Zygmund 函数的延拓定理

王朝祥　　黄心中

(华侨大学数学系，福建 泉州 362021)

摘要　设 $f(x)$是闭区间 I 上的连续函数，$f(x)$为 I 上的 Zygmund 函数. 如果存在常数 $C\geqslant 0$，使得 $f(x)$满足$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|<Ct$,则对一切 $x,x\pm t\in I,t>0$ 成立. 可将其延拓成 $\mathscr{R}$ 上的 Zygmund 函数的充分条件，并估计其范数 $\|f\|_z$.

关键词　Zygmund 函数，拟共形变形，拟共形映照，延拓

中图分类号　O 174.5　　　**文献标识码**　A

1　问题的提出

设函数 $f(x)$在区间 I 上为实值连续函数，令

$$\lambda_f(x,t)=|[f(x+t)-lf(x)+f(x-t)]/t|.$$

如果对所有 $x\in I$，$x\pm t\in I$ 及 $t>0$，$\lambda_f(x,t)$ 有界，则称函数 $f(x)$为区间 I 上的 Zygmund 类函数，记为 $f(x)\in\Lambda_*(I)$. 并设 $Z(f)=\sup\limits_{x\in I,x\pm t\in I,t>0}\lambda_f(x,t)$，对 $\mathscr{R}$ 上的 Zygmund 类函数 $f(x)\in\Lambda_*(\mathscr{R})$，定义其范数为 $\|f\|_z=\sup\limits_{x\in\mathscr{R},t>0}\lambda_f(x,t)$. 注意到若 $f(x)\in\Lambda_*(\mathscr{R})$，则 $f^*(x)=\frac{1}{a}f(ax+b)+cx+d\in\Lambda_*(\mathscr{R})$. 其中，$a,b,c,d\in\mathscr{R},a\neq 0$，且 $\|f^*(x)\|_z=\|f(x)\|_z$. 对于区间上 Zygmund 函数的研究，引起不少学者的兴趣，文[1～3]研究了其偏差性质界限估计. 另一方面，Zygmund 函数与拟共形变形也有十分密切的联系. 定义在 $\overline{H}=\{z|\operatorname{Im} z\geqslant 0\}$上的连续复值函数 $F(z)$，如果它具有有限广义导数，即 $\|\bar\partial F\|_\infty<\infty$，则称 $F(z)$为上半平面 $H=\{z|\operatorname{Im} z>0\}$上的拟共形变形函数. 记 H 上的拟共形变形函数的全体为 $Q_*(H)$，$\Lambda_*(\mathscr{R})$函数类与 $Q_*(H)$函数类具有密切联系. 文[4,5]分别证明，$\mathscr{R}$ 上连续实值函数 $f(x)$可延拓为 $F(z)\in Q_*(H)$的充分必要条件是 $f(x)\in\Lambda_*(\mathscr{R})$. 事实上，文[4]证明 $f(x)\in\Lambda_*(\mathscr{R})$的 Beurling-Ahlfors 延拓[6] $F(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\in Q_*(H)$具有有限的广义导数 $\|\bar\partial F\|_\infty\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}\|f\|_z$，其中

$$u(x,y)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}f(t)\mathrm{d}t,\qquad v(x,y)=\frac{1}{y}\Big(\int_{x}^{x+y}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}f(t)\mathrm{d}t\Big).\tag{1}$$

因此，研究任何区间上 Zygmund 函数可延拓成整个实轴上的 Zygmund 函数是具有相当意义的. 我们知道，一个函数在子区间上分别为 Zygmund 函数，未必是整个区间上的 Zygmund 函数. 另外，闭区间的 Zygmund 函数(其端点处函数值相等)作周期延拓后，也未必是整体的 Zygmund 函数.

例 1　连续函数 $f(x)=\begin{cases}x\log(-x), & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -x\log x, & x>0.\end{cases}$ $f(x)$分别为$(0,+\infty)$和$(-\infty,0)$上的 Zygmund 函数，但 $f(x)$不是$(-\infty,+\infty)$上的 Zygmund 函数.

收稿日期　2005-09-18

作者简介　王朝祥(1966-)，男，讲师，主要从事函数论方向的研究. E-mail:wchaox@hqu.edu.cn

基金项目　福建省自然科学基金资助项目(Z0511025)

关于$\varphi(x)=-x\log x$是$(0,+\infty)$上的Zygmund函数,可参见文[7].又由于$f(-x)=f(x)$,故$f(x)$也是$(-\infty,0)$上的Zygmund函数.当$x=0$时,$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|=\left|\frac{f(t)+f(-t)}{t}\right|=2|\log t|\to+\infty(t\to 0)$,故$f(x)$不是$(-\infty,+\infty)$上的Zygmund函数.

例2 设$f(x)$是周期为1的连续函数.当$0<x\leqslant 1$时,$f(x)=-x\log x$;当$x=0$时,$f(0)=0$.从例1可知,$f(x)$是$[0,1]$上的Zygmund函数.再由线性变换关系可知,$f(x)$是区间$[n,n+1]$(n为整数)上的Zygmund函数.当$x=0$时,令$t\to 0^+$,则$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\right|=\left|\frac{f(t)+f(1-t)}{t}\right|=\frac{1}{t}\cdot|-t\log t+(t-1)\log(1-t)|\to+\infty$.故$f(x)$不是$(-\infty,+\infty)$上的Zygmund函数.

基于以上事实,我们可证明如下定理.

定理1 设$I=[0,+\infty)$,$f(x)\in\Lambda_*(I)$,且$f(0)=0$.将$f(x)$作奇延拓,有

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & x\geqslant 0,\\ -f(-x), & x<0,\end{cases}$$

则$\varphi(x)\in\Lambda_*(\mathscr{R})$.类似于上半平面到自身上拟共形映照的边界值满足$\rho$对称函数的条件,有必要研究分段Zygmund函数化成整体Zygmund函数的条件.

定理2 设$f(x)$分别为$[-1,0]$和$[0,\infty)$上的Zygmund类函数,$f(0)=0$.而且对于$0<t<1$,总有$|f(t)+f(-t)|\leqslant|t|$,则$f(x)$为$[-1,\infty)$上的Zygmund类函数.鉴于以上定理,自然有如下问题:$f(x)$为定义在$[0,1]$上的Zygmund类函数,$f(0)=f(1)=0$.将其奇延拓到$[-1,1]$,再周期延拓到$(-\infty,+\infty)$,则必须证明f是$\mathscr{R}$上的Zygmund类函数.

定理3 设$f(x)\in\Lambda_*([0,1])$,满足$f(0)=f(1)=0$,$Z(f)\leqslant M$.则$f(x)$可以延拓成$\mathscr{R}$上的Zygmund类函数.

2 定理的证明

(1) 定理1的证明.设$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\leqslant Mt$,其中$x\geqslant t>0$.只须考虑$x>0$,$x-t<0$的情形,其他情况可类似证明.首先,有

$$|\varphi(x+t)+\varphi(t-x)-2\varphi(t)|\leqslant M\cdot x,\qquad t>x>0. \tag{2}$$

$$|\varphi(t)-2\varphi(\frac{t}{2})|\leqslant M\cdot\frac{t}{2},\qquad t>0. \tag{3}$$

另外,当$\frac{t}{2}-x\geqslant 0$时,$|\varphi(\frac{t}{2}+(\frac{t}{2}-x))+\varphi(\frac{t}{2}-(\frac{t}{2}-x))-2\varphi(\frac{t}{2})|\leqslant M(\frac{t}{2}-x)$;而当$\frac{t}{2}-x\leqslant 0$时,$|\varphi(\frac{t}{2}+(x-\frac{t}{2}))+\varphi(\frac{t}{2}-(x-\frac{t}{2}))-2\varphi(\frac{t}{2})|\leqslant M(x-\frac{t}{2})$.于是,有

$$|\varphi(t-x)+\varphi(x)-2\varphi(\frac{t}{2})|\leqslant M\cdot|\frac{t}{2}-x|,\qquad t>x>0. \tag{4}$$

所以$|\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)|=|\varphi(x+t)-\varphi(t-x)-2\varphi(x)|=|[\varphi(x+t)+\varphi(t-x)-2\varphi(t)]-2[\varphi(t-x)+\varphi(x)-2\varphi(\frac{t}{2})]+2[\varphi(t)-2\varphi(\frac{t}{2})]|\leqslant M\cdot x+2M\cdot|\frac{t}{2}-x|+2M\cdot\frac{t}{2}=M(x+t+|t-2x|)$.当$x<t\leqslant 2x$时,$M(x+t+|t-2x|)=M(x+t+2x-t)=3Mx\leqslant 3Mt$;当$t>2x$时,$M(x+t+|t-2x|)=M(2t-x)\leqslant 2Mt$.因此,有$|\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)|\leqslant 3Mt$,$t>x>0$.所以$\varphi(x)\in\Lambda_*(\mathscr{R})$,且$\|\varphi\|_*\leqslant 3M$.

注记 若连续函数$y=f(x)$,$x\in[a,b]$的图形关于点$(\frac{a+b}{2},f(\frac{a+b}{2}))$中心对称,且$f(x)$在区间$[a,\frac{a+b}{2}]$或$[\frac{a+b}{2},b]$上为满足$Z(f)\leqslant M$的Zygmund类函数,则$f(x)$为$[a,b]$上的Zygmund类函数,并且$Z(f)\leqslant 3M$.

(2) 定理2的证明.同样仅考察$t>x>0$的情形,有

$$|\varphi(x+t)+\varphi(t-x)-2\varphi(t)| \leqslant M\cdot x,\qquad t>x>0. \tag{5}$$

$$|\varphi(t-x)+\varphi(x)-2\varphi(\frac{t}{2}) \leqslant M\cdot|\frac{t}{2}-x|,\qquad t>x>0. \tag{6}$$

$$|\varphi(t)-2\varphi(\frac{t}{2})| \leqslant M\cdot\frac{t}{2},\qquad t>0. \tag{7}$$

$$|\varphi(t-x)+\varphi(x-t)| \leqslant K(t-x),\qquad t>x>0. \tag{8}$$

$$\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)=[\varphi(x+t)+\varphi(t-x)-2\varphi(t)]-$$

$$2[\varphi(t-x)+\varphi(x)-2\varphi(\frac{t}{2})]+2[\varphi(t)-2\varphi(\frac{t}{2})]+[\varphi(t-x)+\varphi(x-t)]$$

故$|\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)|\leqslant Mx+K(t-x)+2M\cdot\frac{t}{2}+2M|\frac{t}{2}-x|=M(x+t+|t-2x|)+K(t-x)$. 当$x<t\leqslant 2x$时，$M(x+t+|t-2x|)+K(t-x)=3Mx+K(t-x)\leqslant(3M+K)t$；当$t>2x$时，$M(x+t+|t-2x|)+K(t-x)=M(2t-x)+K(t-x)\leqslant(2M+K)t$. 故$|\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)|\leqslant(3M+K)t$，从而$\varphi(x)$为$[-1,\infty)$上的Zygmund类函数，且$Z(\varphi)\leqslant 3M+K$.

注记　设$\varphi(x)$分别为$[-1,0]$和$[0,a]$($a\geqslant 1$)上的Zygmund类函数，$\varphi(0)=0$，且对于$0<t<1$总有$|\varphi(t)+\varphi(-t)|\leqslant Kt$. 则$\varphi(x)$为$[-1,a]$的Zygmund类函数，并且$Z(\varphi)\leqslant 3M+K$.

(3) 定理3的证明. 先将$f(x)$奇延拓到区间$[-1,1]$，再以周期为2延拓到$\mathscr{R}$上，记为$\varphi(x)$. 注意到当$0<t<1$时，$\varphi(1+t)+\varphi(1-t)=\varphi(t-1)+\varphi(1-t)=0$.

(Ⅰ) 根据线性变换关系，容易证明$\varphi(x)$是每个区间$[n,n+1]$(n为整数)上满足$Z(\varphi)\leqslant M$的Zygmund类函数，从而$\varphi(x)$是每个区间$[2k,2k+2]$及$[2k-1,2k+1]$(k为整数)上的Zygmund类函数，并且$Z(\varphi)\leqslant 3M$.

(Ⅱ) 证明$\varphi(x)$是$[-1,2]$上的Zygmund类函数. 将该区间$[-1,2]$分为$[-1,0]$，$[0,1]$，$[1,2]$共3个小区间. 当$x-t,x,x+t$都落在同一个小区间，或者落在相邻的两个小区间内，总有$\lambda_\varphi(x,t)\leqslant 3M$. 故只须讨论$x-t\in[-1,0]$，$x\in[0,1]$，$x+t\in[1,2]$的情形. 当$x-t\in[-1,0]$，$x\in[0,1]$，$x+t\in[1,2]$时，有

$$|\varphi(2-x-t)+\varphi(t-x)-2\varphi(1-x)| \leqslant M\cdot|t-1|, \tag{9}$$

$$|\varphi(1-x)+\varphi(x)-2\varphi(\frac{1}{2})| \leqslant M\cdot|\frac{1}{2}-x|, \tag{10}$$

$$|\varphi(1)+\varphi(0)-2\varphi(\frac{1}{2})| \leqslant M\cdot\frac{1}{2}. \tag{11}$$

于是，有

$$|\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)|=|-\varphi(2-x-t)-\varphi(t-x)-2\varphi(x)|=$$

$$|[\varphi(2-x-t)+\varphi(t-x)-2\varphi(1-x)]+2[\varphi(1-x)+\varphi(x)-2\varphi(\frac{1}{2})]+4\varphi(\frac{1}{2})|\leqslant$$

$$|\varphi(2-x-t)+\varphi(t-x)-2\varphi(1-x)|+2|\varphi(1-x)+\varphi(x)-2\varphi(\frac{1}{2})|+4|\varphi(\frac{1}{2})|\leqslant$$

$$M\cdot|t-1|+2M\cdot|\frac{1}{2}-x|+M=M(|t-1|+|1-2x|+1).$$

若$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$且$0<t\leqslant 1$，注意到$x+t\geqslant 1$及$t>x\geqslant 0$，$M(|t-1|+|1-2x|+1)=M(3-t-2x)\leqslant M(3(x+t)-t-2x)=M(2t+x)\leqslant 3Mt$；若$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$且$t>1$，$M(|t-1|+|1-2x|+1)=M(1+t-2x)\leqslant M((2t-2x)\leqslant 2Mt$；若$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$且$0<t\leqslant 1$，注意到$x+t\geqslant 1$以及$t>x>0$，$M(|t-1|+|1-2x|+1)=M(1-t+2x)\leqslant M(x+t)-t+2x)=3Mx\leqslant 3Mt$；若$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$且$t>1$，注意到$t>x>0$，$M(|t-1|+|1-2x|+1)=M(t+2x-1)\leqslant M(t+2x)\leqslant 3Mt$. 因此，当$x-t\in[-1,0]$，$x\in[0,1]$，$x+t\in[1,2]$时，总有$\lambda_\varphi(x,t)\leqslant 3M$. 从而$\varphi(x)\in\Lambda_*([-1,2])$，$\lambda_\varphi(x,t)\leqslant 3M$.

(Ⅲ) 证明 $\varphi(x)$ 是 $[-2,2]$ 上的 Zygmund 类函数. 将该区间 $[-2,2]$ 分为 $[-2,1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$ 共 4 个小区间，当 $x-t, x, x+t$ 都落在同一个小区间上，或者落在相邻的两个小区间上，或者落在紧邻的 3 个小区间上，总有 $\lambda_\varphi(x,t)\leqslant 3M$. 故只须讨论 $x-t\in[-2,-1]$ 且 $x+t\in[1,2]$ 的情形. 这时总有 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, 并且 $-1\leqslant x+t-2\leqslant 0$, $0\leqslant x-t+2\leqslant 1$, $|\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)|=|\varphi(x+t-2)+\varphi(x-t+2)-2\varphi(x)|\leqslant 3M|t-2|$. 当 $t\geqslant 2$ 时, $3M|t-2|\leqslant 3Mt$; 当 $t<2$ 时, 由 $x-t\leqslant -1$ 得 $2t-2x\geqslant 2$, $3M|t-2|=3M(2-t)\leqslant 3M(2t-2x-t)=3M(t-2x)\leqslant 3Mt$. 因此, $\varphi(x)$ 是 $[-2,2]$ 上的 Zygmund 类函数，且 $\lambda_\varphi(x,t)\leqslant 3M$.

(Ⅳ) 证明 $\varphi(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的 Zygmund 类函数. 对于任意 $x\in\mathscr{R}$ 及 $t>0$, 设 $x=2m+x_0$ (m 为整数, $-1\leqslant x_0<1$), $t=2n+t_0$ (n 为非负整数, $0\leqslant|t_0|\leqslant 1$). 从而 $-2\leqslant x_0-|t_0|\leqslant 1$, $-1\leqslant x_0+|t_0|\leqslant 2$, 并且 $t\geqslant|t_0|$. 由(Ⅲ)得 $\varphi(x)\in\Lambda_*([-2,2])$，所以

$$
\begin{gathered}
|\varphi(x+t)+\varphi(x-t)-2\varphi(x)|= \\
|\varphi(2m+x_0+2n+t_0)+\varphi(2m+x_0-2n-t_0)-2\varphi(2m+x_0)|= \\
|\varphi(x_0+t_0)+\varphi(x_0-t_0)-2\varphi(x_0)|= \\
|\varphi(x_0+|t_0|)+\varphi(x_0-|t_0|)-2\varphi(x_0)|\leqslant 3M|t_0|\leqslant 3Mt.
\end{gathered}
$$

故 $\varphi(x)\in\Lambda_*(\mathscr{R})$ 且 $\|\varphi\|_z\leqslant 3M$.

注记 事实上，由 $\varphi(x)$ 是 $[0,1]$ 上满足 $Z(\varphi)\leqslant M$ 的 Zygmund 函数，可以推出 $\varphi(x)$ 是 $[0,2]$ 上满足 $Z(\varphi)\leqslant 3M$ 的 Zygmund 函数，进而推出 $\varphi(x)$ 是 $[-2,2]$ 上满足 $Z(\varphi)\leqslant 9M$ 的 Zygmund 函数. 最后，按照(Ⅳ)的推算过程得 $\varphi(x)\in\Lambda_*(\mathscr{R})$，并得出 $\|\varphi\|_z$ 的较粗略估计 $\|\varphi\|_z\leqslant 9M$.

3 结束语

在拟共形映照理论中，拟共形变形与拟共形映照有相当密切的联系，它们边界值的 Beurling-Ahlfors 延拓就是一种. 进一步探索两者之间的内在关系是一件相当有意义的工作，对以上两种函数类的研究应该有相互的推动作用.

参考文献

1 Baladi V, Jiang Y P, Lanford O E. Transfer operators acting on Zygmund functions[J]. Trans Amer Math Soc, 1996, 348(4): 1 599～1 615

2 Huang Xinzhong, Oh S K, Jun E P. On the maximum value for Zygmund class on an interval[J]. IJMMS, 2002, 32(2): 65～71

3 王朝祥,黄心中. Zygmund 函数在闭区间上最大值的估计[J]. 数学研究, 2005, 38(1): 66～70

4 Gardiner F, Sullivan D. Symmetric structures on a closed curve[J]. Amer J Math, 1992, (114): 683～736

5 Reich E, Chen J. Extensions with bounded $\bar{\partial}$-derivative[J]. Ann Acad Sci Fenn AI, 1991, 16: 377～389

6 Beurling A, Ahlfors L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings[J]. Acta Math, 1956, 96: 125～142

7 Duren P L. Theory of H^p spaces[M]. New York: Academic Press, 1970. 91

On the Extension Theorem for Zygmund Functions in Closed Interval

Wang Chaoxiang　　Huang Xinzhong

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract Let $f(x)$ be continuous on closed interval I, $f(x)$ is called a Zygmund function on I if there exists one constant $C\geqslant 0$ such that $|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|<Ct$ for all $x, x\pm t\in I$ and for $t>0$. We give sufficient condition for such Zygmund function which can be extended to a Zygmund function on $\mathscr{R}$ and give estimation for its norm $\|f\|_z$.

Keywords Zygmund function, quasiconformal deformation, quasiconformal mapping, extension