文章编号　1000-5013(2006)01-0068-03

若干最优化控制方法

王　永　初

(华侨大学机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

摘要　最优控制是现代控制理论的中心课题,许多最优控制方法都可用于控制系统的设计. 文中首先分析这些控制方法的一致性和差异,然后利用一个系统的弹性系数或向量,将控制目标函数与限制条件组合成一个统一的盒子函数. 这个新的盒子函数用于最优控制系统的设计,可以导致最优控制机理更加清晰,也使控制系统设计更加方便.

关键词　最优控制, 系统设计, 统一盒子函数, 现代控制理论

中图分类号　TP 273^{+}.1　　**文献标识码**　A

20 世纪 60 年代,现代控制理论已趋于成熟,并在工业生产过程中开始推广应用,其核心课题是最优化控制. 优化是一种好中求好的泛称. "最优"提法其实并不科学,严格地说,最优控制是在某个准则函数的规范下的最优,即从某一个角度看是最优,而从另一个角度看就不是最优. 譬如泛函 $J(X,u,t)=\int f_0(X,u,t)\,\mathrm{d}t$ 作为目标函数, $f_0(X,u,t)$ 可以选择二次型,如 $X^{\mathrm{T}}X$, $X^{\mathrm{T}}QX$,或 $u^{\mathrm{T}}Ru+X^{\mathrm{T}}QX$,或 1(最短控制时间问题),甚至更加复杂的性能指标函数. 最优控制问题求解的困难,不仅在于求解泛函的极值不容易,而且问题的解还受到许多客观条件的限制与影响,如解函数要符合被控制对象固有的特性与规律. 即以对象状态方程作限制条件,庞特尼雅金最大最小值优化原理属于此类. 或在满足目标函数最优的同时,满足某个控制能量限制,还有位置变化限制等. 此类限制条件通常用等周方程式表示,变分法最优化原理属于此类;或以渐近稳定作为限制条件,如状态最优反馈控制等. 因此,优化控制的一般提法[1]是使目标函数

$$J(X,u,t)=\int_0^1 f_0(X,u,t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

趋近最小值,其限制条件为

$$L((X,u,t)\leqslant 0. \tag{2}$$

优化问题的多样性导致控制方法的多样性,传统最优控制方法是变分法. 它将复杂的积分方程求解问题,通过欧拉方程转变为微分方程的求解问题[2]. 但变分法在解释系统渐近稳定性与边界最优控制问题上,遇到了困难,甚至不适用. 于是出现基于李雅普诺夫稳定性原理的最优状态反馈控制方法[3],及基于庞特尼雅金最大最小值原理的最优控制等方法[4]. 这些方法的一致性与差异是本文研究的主要内容.

1　盒子函数组装原理

在满足限制条件(2)并求解目标函数(1)的最优解时,利用盒子函数原理(也称之为盒子函数组装原理),将两个套装函数装配在一个盒子 $H(X,u,t)$ 里,其中一个为 $f_0(X,u,t)$,另一个为 $L(X,u,t)$. 在保证 $f_0(X,u,t)$ 首先全部装入的前提下,要装满盒子,且仅仅装满盒子;另一个 $L(X,u,t)$ 必须有内部缩涨性,或外部取舍有通融性. 因此,有两种表示方式,即

收稿日期　2005-06-20
作者简介　王永初(1937-),男,教授,主要从事控制理论与应用的研究. E-mail:ycwang@hqu.edu.cn
基金项目　国务院侨务办公室重点科研基金资助项目(03QZR13)

$$H(X,u,t) = f_0(X,u,t) + L(X,u,M,t), \tag{3a}$$
$$H(X,u,t) = f_0(X,u,t) + ML(X,u,t). \tag{3b}$$

于是,对式(1),(2)问题的求解就转化为对式(3)问题的求解. 在式(3)中,M为弹性系数,也是 $f_0(X,u,t)$ 函数与 $L(X,u,t)$ 函数的协调系数. 根据盒子函数原理,许多费解的最优控制算式可以得到很好的解释,并可使不同角度、不同基础的最优控制问题得到统一. 在变分法最优控制问题中,弹性(协调)系数或弹性向量 M 就相当于拉格朗日函数的待定系数或待定向量 μ. 在状态反馈控制系统设计中,M 就是闭环控制系统的李雅普诺夫方程式的待定矩阵. 在最大最小值问题中,就是系统状态 $X(t)$ 的伴随向量(或称协态向量),即

$$\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial M(X,u,t)}{\partial X(t)}, \tag{4a}$$
$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(X,u,t)}{\mathrm{d}M(t)}. \tag{4b}$$

这样,不同优化问题可以统一为同一的描述形式,不同求解也趋于一致. 若记最优控制 $u(t)$ 的最优解为 $u^*(t)$,即 $u^*(t)$ 满足如下两个条件之一. (1) $\frac{\partial H(X,u,t)}{\partial u} = 0$. (2) $H(X,u,t)$ 随时为最大. 前者适用变分法最优控制与状态最优反馈控制;后者适用于最大最小值优化控制.

2　目标函数的统一

状态反馈控制的限制条件为

$$\dot{X}_i(t) = f_i(X,u,t), \qquad i = 0,1,2,\cdots,n. \tag{5a}$$

当系统为线性时,则为

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t). \tag{5b}$$

状态反馈控制采用状态反馈控制 $u(t) = -KX(t)$,使二次型目标函数达到最小值[5]. 即

$$J(X,u,t) = \int_0^{\infty}[X^{\mathrm{T}}(t)QX(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t \tag{6}$$

趋近最小值. 状态反馈控制的前提是系统具有渐进稳定性,即满足系统的李雅普诺夫函数 $V(X) = X^{\mathrm{T}}MX \geq 0$,而函数的时间导数 $\dot{V}(X) \leq 0$. 将系统状态方程式(5b)代入 $\dot{V}(X)$,可得

$$\dot{V}(X) = X^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}M + MA)X(t) + 2u^{T}MX(t) \leq 0. \tag{7}$$

由式(6),(7)按一致协调原则关系式(3a),可得

$$H(X,u,t) = X^{\mathrm{T}}(t)QX(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) + X^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}M + MA)\cdot X(t) + 2u^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}MX(t). \tag{8}$$

并由 $\partial(X,u,t)/\partial u = 0$,求得 $u^* = -KX(t)$. 其中, $K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}M$, M 为具有状态反馈控制李雅普诺夫方程的解. 即黎卡提方程的解为

$$A^{\mathrm{T}}M + MA - MBR^{-1}B^{\mathrm{T}}M + Q = 0. \tag{9}$$

这就是目标函数统一的另一种形式(式 3a),由 $\dot{V}(X)$ 内部的 M 进行协调. 变分法最优控制与最大最小值原理最优控制,其目标函数都是从外部加入弹性系数(或向量)进行协调的,但两者之间分析与观察的出发点是有差别的. 采用庞特尼雅金最大最小值优化原理时,式(5a)就是限制条件,由式(5b)可得

$$L_i(X,u,t)\dot{X}_i(t) = f_i(X,u,t). \tag{10}$$

于是,按式(3a)可构成一个新的目标函数,有

$$H(X,u,t) = M_0(t)f(X,u,t) + \sum_{i=1}^{n}M_lL_l(X,u,t) = f_0(X,u,t) + \sum_{i=1}^{n}M_if_i(X,u,t). \tag{11}$$

M_i 为 X_i 的伴随变量,伴随关系满足式(4a),(4b). 由于最优控制问题一般都是极小化问题,即有 $M_0(t) = 1$. 庞特尼雅金最优化算法是求极大值的算法,所以一般性最小化问题要变成极大值问题,即应取 $M_0(t) = -1$. 于是,式(11)变换为

$$H(X,u,t) = -f(X,u,t) + \sum_{i=1}^{n}M_if_i(X,u,t), \tag{12}$$

式(12)称为哈密尔顿函数. 最优控制 $u^*(t)$ 就是维持 $H(X,u,t)$ 随时为最大的控制,通常由式(12)可以求得最优化问题的最优解. 例如最短时间控制问题,被控对象是一个机电动态系统,即

$$\dot{X}_1 = X_2, \qquad \dot{X}_2 = u.$$

目标函数 $J(X,u,t) = \int_0^s f_0(X,u,t)\mathrm{d}t$ 趋于最小值,即 $f_0(X,u,t) = -1$ 得到系统的最短时间控制的哈密尔顿函数为

$$H(X,u,t) = -1 + M_1 X_2 + M_2 u. \tag{13}$$

根据最大值原理,立即由式(13)可以得出,维持 $H(X,u,t)$ 随时为最大的控制 u, $u^*(t) = \mathrm{sign}(M_2(t))$,这里 $\mathrm{sign}(\cdot)$ 表示取括号( )内函数的符号.

在变分法问题上,限制条件虽然同样是被控对象的状态方程式,但限制条件式为等周方程式. 即

$$L_i(X,u,t) = \dot{X}_i(t) - f_i(t) = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{14a}$$

或

$$L(X,u,t) = \dot{X}(t) - f(t) = 0. \tag{14b}$$

由于 $L_i(X,u,t)$ 内部关系固定,不具有内部伸缩性能,因此必须从外部协调. 于是,构成一个类似于哈密尔顿函数的拉格朗日函数,有

$$H(X,u,t) = f_0(X,u,t) + \sum_{i=1}^{n} M_i f_i(X,u,t), \tag{15}$$

构成一个新的目标函数 $W(X,u,t) = \int_0^1 H(X,u,t)\mathrm{d}t$ 趋近于最小值. X, u, M 取各自最优值 X^*, u^* 和 M^*,其形式分别为 $X(t) = X^*(t) + \varepsilon_1\eta(t)$; $u(t) = u^*(t) + \varepsilon_2\xi(t)$; $M(t) = M^*(t) + \varepsilon_3\psi(t)$. 由 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}\varepsilon = 0$ 条件,可得求系统最优解的 4 个方程式. (1) 状态方程式 $H_M = \dfrac{\partial H(X,u,t)}{\partial M} = 0$. (2) 控制方程式 $H_u = \dfrac{\partial H(X,u,t)}{\partial u} = 0$. (3) 欧拉方程式 $H_X - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H_{\dot{X}} = \dfrac{\partial H(X,u,t)}{\partial X} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\dfrac{\partial H(X,u,t)}{\partial \dot{X}}\} = 0$. (4) 斜截条件 $[\eta^{\mathrm{T}} H_{\dot{X}}]_{t_0}^{t_1} = 0$. 这样,最优控制几种设计方法的统一性与差异性就得到清楚的表达.

4 结束语

最优化控制理论从古典的变分原理,发展到近代的变分原理(庞特尼雅金最大最小值优化原理),以及现代控制理论的最优状态反馈控制理论. 这些原理与方法几乎是没有联系的,其差异也是模糊的. 本文采用一种统一的组合函数,将几种主要的最优控制方法联系起来,可以清晰地看出各种最优化控制方法的一致性与差异性. 因此,这样的组合函数方法,将会更方便各种最优化控制理论在工程中的应用.

参 考 文 献

1 Frank L L. Optimal control[M]. New York: John Wiley & Sons,1986. 15～27

2 王永初. 现代控制工种的数学基础[M]. 北京:化学工业出版社,1985. 416～432

3 Franklim G F. Digital control of dynamic systems[M]. New York: Addison-Wesley, 1990. 422～450

4 王永初. 最佳控制系统设计基础[M]. 北京: 科学出版社,1980. 264～302

5 William L B. Modern control theory[M]. London: Prentiee-Hall,1991. 443～460

Several Methods of Optimal Control

Wang Yongchu

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract Optimal control is the central topic of modern control theory, and many methods of optimal control can all be used in the design of control system. Beginning with an analysis of coherence and discrepancy of these control methods, the author unites objective function of control and condition of restriction into an integrated box function. To use this new box function in the design of optimal control system will cause the mechanism of optimal control even more distinct and will also make the design of control system even more convenient.

Keywords optimal control, system design, integrated box function, modern control theory