文章编号 1000-5013(2006)01-0028-03

拟交比同胚作为拟对称函数的偏差估计

林 珍 连

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 单位圆上的拟交比同胚和拟对称函数, 都是拟共形映照边界值的一种几何表征. 文中在 Zajac 等人对两者关系研究的基础上作进一步研究, 改进相关结果并得到更好的上界估计.

关键词 拟交比同胚, 拟对称函数, 偏差估计, 单位圆
中图分类号 O 174.55 文献标识码 A

1987年, Krzyż[1]给出了单位圆周 $T=\{z\,|\,z=1\}$ 上的拟对称函数的定义. T 到自身的一个保向同胚 $\tilde{h}$ 是拟对称的, 当且仅当存在一个常数 $\rho\geqslant 1$, 使得对 T 的每一对不相交的, 但相邻且具有相等弧长的开子弧 α_1, α_2, 有 $|\tilde{h}(\alpha_1)|/|\tilde{h}(\alpha_2)|\leqslant\rho$. 其中 $|\alpha|$ 表示弧长. 用 $Q_T(\rho)$ 表示 T 上的一切 ρ-拟对称函数所成的集合. $Q_T^0(\rho)=\{f\in Q_T(\rho),f(1)=1\}$. 随后, Zajac[2]给出了单位圆周上拟交比同胚的定义, 即单位圆周 T 的一个保向同胚 f 称为 T 的一个拟交比同胚. 如果对 T 上不同有序的4点 z_1, z_2, z_3, z_4 存在常数 $K\geqslant 1$, 则满足

$$\Phi_{1/K}([z_1,z_2,z_3,z_4])\leqslant[f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4)]\leqslant\Phi_K([z_1,z_2,z_3,z_4]).$$

在上式中, $[z_1,z_2,z_3,z_4]=\left\{\dfrac{z_3-z_2}{z_3-z_1}:\dfrac{z_4-z_2}{z_4-z_1}\right\}^{\frac{1}{2}}$, $\Phi_K(t)=\mu^{-1}(K^{-1}\mu(t))$ 是 Hersch-Pfluger 偏差函数. 用 $A_T(K)$ 表示 T 的一切拟交比同胚所成的全体, $A_T^0(K)=\{f\in A_T(K);f(z)=z,z^3=1\}$. 关于 $A_T(K)$ 是不是拟对称的问题, Zajac 作出了肯定的回答, 并证明了相关定理[2]. 本文在此基础上, 改进了结果.

1 相关事实

设 $M(\Delta)$ 表示 Δ 中保向同胚的 Möbius 变换, 置 $\boldsymbol{a}^*=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$, $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n/\{0\}$. 设 $\sigma(x)=\boldsymbol{a}^*+r^2(x-\boldsymbol{a}^*)$, $r^2=|\boldsymbol{a}|^{-2}-1$ 是球 $S^{n-1}(\boldsymbol{a}^*-r)$ 中的反形, $P_a=\{f\,|\,f=x-2x\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\}$. 则 $T_a=P_a\circ\sigma_a\in M(\Delta)$, 且有 $T_a:\Delta\to\Delta$, $T_a(\boldsymbol{a})=0$, $T_a(-1)=-1$, $T_a(1)=1$. 设 (X_1,d_1), (X_2,d_2) 是度量空间, 且 $L\geqslant 1$, $f:X_1\to X_2$ 是连续的. 如果 $d_2(f(x),f(y))\leqslant Ld_1(x,y)$, $\forall x,y\in X_1$, 则 f 是 L-李普希兹的, 用 $Lip(f)$ 表示具有这样性质的 L. 文[3]有如下2点结论. (1) $Lip(T_a|\Delta)=\sup\left\{\dfrac{|T_ax-T_ay|}{|x-y|}\right\}=\dfrac{1+|\boldsymbol{a}|}{1-|\boldsymbol{a}|}$, $x,y\in\Delta$, $x\neq y$. (2) 若 $\varphi\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $x_\varphi=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, $y_\varphi=(\cos\varphi,-\sin\varphi)$, 则存在一个 Möbius 变换 $T_a:\Delta\to\Delta$ 它具有 $T_a(-1)=-1$. $T_a(1)=1$, $T_a(x_\varphi)=i=-T_a(y_\varphi)$, 且 $Lip(h\circ f|\Delta)=\cot(\dfrac{\varphi}{2})$. 由此可知, 若 $f\in A_T(K)$, h 是 T 到 T 的一个自同构, 则有 $Lip(h\circ f|\Delta)\leqslant 1/\sin(\varphi_f/2)$. 事实上, 若 $f\in A_T(K)$, 可找到一个 h, 使得 $h\circ f(z_1)=\zeta_1$, $h\circ f(z_2)=\zeta_2$, 其中 $z_1=-z_2$, $\zeta_1=-\zeta_2$. 考虑 $T_a=h\circ f$, $a=|h(0)|e^{i\theta}$, 则有某个 $z_0\in T$, 使得

$$\left|\frac{h\circ f(z_0)-h\circ f(-z_0)}{f(z_0)-f(-z_0)}\right|\leqslant\frac{2}{2\sin(\varphi_f/2)}=\frac{1}{\sin(\varphi_f/2)},\tag{1}$$

收稿日期 2005-03-28
作者简介 林珍连(1970-), 女, 讲师, 主要从事函数论的研究. E-mail: zhenlian@hqu.edu.cn

$$\sup_{x,y\in\Delta}\left\{\frac{|T_a x - T_a y|}{|x-y|}\right\} = \frac{1+|a|}{1-|a|} \leqslant \frac{1}{\sin(\varphi_f/2)}. \tag{2}$$

2　主要结论及证明

定理 1　如果 $f\in A_T(K)$, 则存在一个常数 $\rho=\rho(f,K)$, 使得 $f\in Q_T(\rho)$ 且

$$\rho\leqslant\lambda(K)(1/\sin^2(\varphi_f/2)). \tag{3}$$

证明　设 z_1, z_2, z_3, z_4 是 T 上任意不同 4 点, 则有

$$\frac{[z_1,z_2,z_3,z_4]^2}{[z_2,z_3,z_4,z_1]^2} = \frac{|z_3-z_2|\cdot|z_4-z_1|}{|z_4-z_3|\cdot|z_2-z_1|}.$$

对任意的 $f\in A_T(K)$, $w_i=f(z_i)$, 且 $\zeta_i=h(w_i)$, $i=1,2,3,4$. 其中, h 是 T 到 T 的一个自同构, 它满足 $\zeta_4=-\zeta_2$. 考虑 T 的一个有序 4 点组 z_1, z_2, z_3, z_4, 且满足 $z_4=-z_2$, $|z_2-z_1|=|z_3-z_2|$, 因此有 $[z_1,z_2,z_3,z_4]=[z_2,z_3,z_4,z_1]$. 根据 K-拟交比同胚的定义式, 我们有

$$1/\lambda(K)\leqslant\frac{|\zeta_3-\zeta_2||\zeta_4-\zeta_1|}{|\zeta_4-\zeta_3||\zeta_2-\zeta_1|}\leqslant\lambda(K).$$

设 $\alpha=\arg(\frac{\zeta_2-\zeta_4}{\zeta_1-\zeta_4})$, $\beta=\arg(\frac{\zeta_3-\zeta_4}{\zeta_2-\zeta_4})$, 则 $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$, $\frac{|\zeta_3-\zeta_2||\zeta_4-\zeta_1|}{|\zeta_4-\zeta_3||\zeta_2-\zeta_1|}=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}$, 且 $1/\lambda(K)\leqslant\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\beta}\leqslant\lambda(K)$, $\beta\leqslant\mathrm{arctg}(\lambda(K)\mathrm{tg}\alpha)\leqslant\lambda(K)\arctan(\mathrm{tg}\alpha)=\lambda(K)\alpha$. 同理, 有 $\alpha\leqslant\lambda(K)\beta$, $1/\lambda(K)\leqslant\frac{\beta}{\alpha}\leqslant\lambda(K)$. 设 $\overleftarrow{z_1z_2}=\{z\in T:\arg z_1<\arg z<\arg z_2\}$ 且 $|\overleftarrow{z_1z_2}|=|\arg z_1-\arg z_2|$ 表示它的测度, 则对 T 的任意一个子弧 η, 有

$$\frac{1-|a|}{1+|a|}|\eta|\leqslant|h^{-1}(\eta)|=$$

$$\int_\eta|(h^{-1})'(z)|d|z|\leqslant\frac{1+|a|}{1-|a|}|\eta|,$$

其中 $a=|h(0)|$. 由 $f=h^{-1}\circ(h\circ f)$, 可得

$$\frac{|\overleftarrow{w_2w_3}|}{|\overleftarrow{w_1w_2}|}=\frac{|h^{-1}(\overleftarrow{\zeta_2\zeta_3})|}{|h^{-1}(\overleftarrow{\zeta_1\zeta_2})|}\leqslant$$

$$\left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^2\left|\frac{\overleftarrow{\zeta_2\zeta_3}}{\overleftarrow{\zeta_1\zeta_2}}\right|\leqslant\lambda(K)\frac{1}{\sin^2(\varphi_f/2)}.$$

为了证明定理 2, 我们还需下面的引理.

引理 C[2, 4, 5]　对每一个 $K\geqslant1$, $f\in A_T^0(K)$, 有

$$|f(z)-z|\leqslant|\arg f(z)-\arg z|,$$

$$|f(z)-z|\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}\max_{0\leqslant t\leqslant1}[\Phi_K^2(\sqrt{t})-t].$$

其中 $M(K)=\max_{0\leqslant t\leqslant1}[\Phi_K^2(\sqrt{t})-t]=\Phi_{\sqrt{K}}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})-1$ 是精确的, 且 $M(K)=1-(\frac{K+1}{3K-1})^2$.

定理 2　如果 $f\in A_T^0(K)$, 则存在一个仅与 K 有关的常数 $\rho\geqslant1$, 使得 $f\in Q_T^0(\rho)$, 其中

$$\rho\leqslant\begin{cases}\lambda(K)\dfrac{1}{\cos^2(\frac{4}{\sqrt{3}}(\Phi_{\sqrt{K}}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})-1))}, & 1\leqslant K\leqslant K_1,\\[2ex] \dfrac{5}{6}\lambda(K)+\dfrac{1}{3}\lambda^2(K)+\dfrac{1}{3}\lambda^2(K), & K>K_1.\end{cases} \tag{4}$$

在式(4)中, K_1 为满足方程 $\cos^2(\frac{4}{\sqrt{3}}(\Phi_{\sqrt{K}}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})-1))=\frac{2}{3}$ 的解.

证明　因为 $f\in A_T^0(K)$, 根据文[4]中定理 2 可知, $\varphi_f>\frac{2\pi}{3}-4\mathrm{arctg}((2\Phi_K^2(\frac{1}{\sqrt{2}})-1)/\sqrt{3})$, 从而有

$$\mathrm{ctg}^2(\varphi_f/4)<\frac{1}{3}(\frac{1+\Phi_K^2(1/\sqrt{2})}{1-\Phi_K^2(1/\sqrt{2})})^2=\frac{1}{3}(1+2\lambda(K))^2. \tag{5}$$

将式(5)应用于式(3), 可得式(4)中 $K > K_1$ 的估计式, 即有

$$\frac{1}{\sin^2(\varphi_f/2)} = 1 + \cot^2(\frac{\varphi_f}{2})^2 =$$

$$1 + \frac{1}{4}(\mathrm{ctg}(\varphi_f/4) - \frac{1}{\mathrm{ctg}(\varphi_f/4)})^2 \leqslant$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{ctg}^2(\varphi_f/4) \leqslant \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\lambda(K) + \frac{1}{3}\lambda^2(K).$$

式(5)中第1个不等式由 φ_f 的定义可得. 另一方面, 由引理C有

$$\varphi_f > \min_{z \in T}(\pi - 2|\arg f(z) - \arg z|) \geqslant \pi - \frac{8}{\sqrt{3}}M(K).$$

因此, 得

$$\frac{1}{\sin^2(\varphi_f/2)} \leqslant \frac{1}{\cos^2(\frac{4}{\sqrt{3}}M(K))}.$$

将这个估计式应用于式(3), 即可得式(4)中 $1 \leqslant K \leqslant K_1$ 的估计式, 其中 K_1 是满足方程

$$\frac{1}{\cos^2(\frac{4}{\sqrt{3}}M(K))} = \min_{1 \leqslant K < \infty}(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\lambda^2(K) + \frac{1}{3}\lambda(K)) = \frac{3}{2},$$

即 $\cos^2(\frac{4}{\sqrt{3}}(\Phi^2_{\sqrt{K}}(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 1)) = \frac{2}{3}$ 的解. 证毕.

3 结束语

拟对称函数的ρ的上界估计在拟共形映射的研究中具有十分重要意义. 本文在 Zajac 基础上对拟交比同胚作为ρ-拟对称函数的ρ作进一步研究, 得出了比 Zajac 更好上界估计.

参 考 文 献

1 Krzyz J. Quasicircles and harmonic measure[J]. Ann Acad Sci Fenn, 1987, 12: 19~24

2 Zajac J. Quasisymmetric functions and quasihomographies of the unit circle[J]. Ann Univ Mariae Curie-Sklodoska Sect (A), 1990, 54(10): 87~99

3 Vuoriren M. Conformal geometry and quasiregular mapings[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1988. 1~20

4 林珍连, 黄心中. 拟交比同胚的偏差估计[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2001, 22(3): 232~236

5 Partyka D. The maximal value of the function[J]. Bull Soc Sci Letters Lodz 45 Ser Rechg Deform, 1995, 20: 49~55

Deviation Estimation for Quasihomographies as a Quasi-Symmetric Function

Lin Zhenlian

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract Quasihomographies and quasi-symmetric function on the unit circle are geometric characterizations of boundary value of quasi-conformal mapping. The author improves some relevant results, and obtains a better estimation of upper bound.

Keywords quasihomographies, quasi-symmetric function, deviation estimation, unit circle