

文章编号 1000-5013(2006)01-0024-04

# 非奇异 $H$ 矩阵的判别定理

陈 恒 新

( 华侨大学数学系, 福建 泉州 362021 )

**摘要** 给出复方阵为非奇异  $H$  矩阵的两个新的、易于检验的充分性判别定理. 通过简便的方法来判别一类矩阵  $A$  为非奇异  $H$  矩阵, 由此得到解相应线性方程组  $Ax = b$  的 AOR 和 SAOR 迭代法收敛性定理.

**关键词** 非奇异  $M$  矩阵, 非奇异  $H$  矩阵, 判别定理, 迭代法

**中图分类号** O 151.2; O 241.6

**文献标识码** A

非奇异  $H$  矩阵是数值代数和矩阵计算中具有广泛应用的重要矩阵类<sup>[1~4]</sup>, 直接用定义来判别矩阵  $A$  是否为非奇异  $H$  矩阵是较为困难的. 因此, 如果能够用简便的方法判别出矩阵  $A$  为非奇异  $H$  矩阵, 这无疑具有理论上的意义和较好的实用价值. 为此, 本文给出了新的、易于检验的判别定理. 它能够方便地来判别一类矩阵  $A$  为非奇异的  $H$  矩阵, 并由此得到解相应线性方程组  $Ax = b$  的 AOR 迭代法和 SAOR 迭代法收敛性定理.

## 1 引理和有关记号

设  $n$  阶方阵  $A = (a_{ij})$ , 空集  $\emptyset$ ,  $N_1 + N_2 = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 = N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ,  $\tilde{N}_1 \cap \tilde{N}_2 = \emptyset$ .  $N^- = \{i | \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|\}$ ,  $N^+ = \{i | \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq |a_{ii}|\}$ .  $\tilde{N}^- = \{i | \sum_{j \neq i} |a_{ji}| < |a_{ii}|\}$ ,  $\tilde{N}^+ = \{i | \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \geq |a_{ii}|\}$ .  $N^- + N^+ = \tilde{N}^- + \tilde{N}^+ = N$ .  $a_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ,  $\tilde{a}_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$ .  $S_i = \sum_{j \in N_1} |a_{ij}|$ ,  $h_i = \sum_{j \in N_2} |a_{ji}|$ ;  $\tilde{S}_i = \sum_{j \in \tilde{N}_1} |a_{ji}|$ ,  $\tilde{h}_i = \sum_{j \in \tilde{N}_2} |a_{ij}|$ , 则  $S_i + h_i = a_i$ ,  $\tilde{S}_i + \tilde{h}_i = \tilde{a}_i$ . 首先, 有如下定义及引理 1<sup>[5]</sup>.

**定义 1** 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 且  $a_{ij} \leq 0$ ,  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . 则称  $A$  为  $Z$  矩阵.

**定义 2** 若  $A = (a_{ij})$  为  $Z$  矩阵, 且  $A^{-1} \geq 0$ , 则称  $A$  为非奇异  $M$  矩阵.

**定义 3** 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n \times n}$ , 记  $m(A) = (m_{ij})$ , 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & j = i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\ -|a_{ij}|, & j \neq i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

则称  $m(A)$  为  $A$  的比较矩阵.

**定义 4** 设  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n \times n}$ , 若  $A$  的比较矩阵为非奇异的  $M$  矩阵, 即  $(m(A))^{-1} \geq 0$ , 则称  $A$  为非奇异  $H$  矩阵.

**引理 1** 若  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n \times n}$  为严格对角占优矩阵, 则  $A$  为非奇异  $H$  矩阵.

## 2 判别定理

**定理 1** 设矩阵  $A = (a_{ij}) \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ,  $A$  之  $N^- = \{i | \sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}|\} \neq \emptyset$ , 任取一非空集  $N_1 \subset N^-$ . 若对  $i \in N_1, j \in N^+ = \{j | \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \geq |a_{jj}|\}$ , 有

收稿日期 2005-05-26

作者简介 陈恒新(1956-), 男, 副教授, 主要从事数值代数和矩阵计算的研究. E-mail: chenhx@hqu.edu.cn

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(03QZR8)

$$\max_{j \in N^+} \frac{S_j}{|a_{jj}| - h_j} = d_1^* < d_2^* = \min_{i \in N_1} \frac{|a_{ii}| - S_i}{h_i},$$

$$|a_{jj}| - h_j > 0, \quad j \in N^+;$$

若对一切  $i \in N_1, h_i = 0$ , 规定  $d_2^* = +\infty$ . 则  $A$  为非奇异  $H$  矩阵.

注 定理中的  $N_1$  可在  $N^-$  中任取. 如假设  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ , 而  $N^- = \{1, 2, 4\}, N^+ = \{3, 5\}$ . 若取  $N_1 = \{1, 4\}$ , 则  $N_2 = \{2, 3, 5\}$ ; 若取  $N_1 = \{2\}$ , 则  $N_2 = \{1, 3, 4, 5\}$ ; 若取  $N_1 = N^-$ , 则  $N_2 = N^+$ . 由于  $N_1$  取法的灵活性, 因此本定理的适用性较广.

证明 首先证明  $d_1^* \geq 1$ . 因为当  $j \in N^+$  时,  $\sum_{k \neq j} |a_{jk}| \geq |a_{jj}|$ . 由于  $S_j + h_j = a_j = \sum_{k \neq j} |a_{jk}|$ , 即有  $S_j + h_j \geq |a_{jj}|, j \in N^+$ . 又由已知条件  $S_j \geq |a_{jj}| - h_j > 0, j \in N^+$ , 可得

$$\frac{S_j}{|a_{jj}| - h_j} \geq 1, \quad j \in N^+.$$

因此有

$$d_2^* = \max_{j \in N^+} \frac{S_j}{|a_{jj}| - h_j} \geq 1$$

对于任意的  $i \in N_1, j \in N_2$ . 以下对  $j$  值分两种情况讨论.

(a) 若  $j \in N^-$ , 则有  $\sum_{k \neq j} |a_{jk}| < |a_{jj}|$ , 即  $S_j + h_j < |a_{jj}|, j \in N^-$ , 可得

$$0 \leq S_j < |a_{jj}| - h_j, \quad j \in N^-. \quad (1)$$

因此有

$$\frac{S_j}{|a_{jj}| - h_j} < 1, \quad j \in N^-, \quad j \in N_2. \quad (2)$$

由于  $d_1^* \geq 1$ , 于是, 由式(1), (2), 可得

$$\left. \begin{aligned} \max_{j \in N^- \cap N_2} \frac{S_j}{|a_{jj}| - h_j} &< d_1^*, \\ |a_{jj}| - h_j &> 0, \quad j \in N_2, \quad j \in N^-. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(b) 若  $j \in N^+$ , 则定理条件给出了

$$\left. \begin{aligned} \max_{j \in N^+} \frac{S_j}{|a_{jj}| - h_j} &< d_1^* < d_2^*, \\ |a_{jj}| - h_j &> 0, \quad j \in N^+. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由式(3), (4), 可得

$$\left. \begin{aligned} \max_{j \in N_2} \frac{S_j}{|a_{jj}| - h_j} &< d_1^* < d_2^* = \max_{j \in N_1} \frac{|a_{ii}| - S_i}{h_i}, \\ |a_{jj}| - h_j &> 0, \quad j \in N_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

因  $1 \leq d_1^* < d_2^*$ , 取  $d = \frac{(d_1^* + d_2^*)}{2}$  (若  $d_2^* = +\infty$ , 则取  $d = d_1^*$ ), 则有  $1 \leq d_1^* < d < d_2^*$ . 由式(5)可知, 对一切  $i \in N_1, j \in N_2$ , 有

$$1 \leq \frac{S_j}{|a_{jj}| - h_j} < d < \frac{|a_{ii}| - S_i}{h_i}. \quad (6)$$

令对角矩阵

$$D = \text{diag}(d_i \mid d_i = 1, i \in N_1, d_i = d, i \in N_2), \quad (7)$$

则有  $\det D \neq 0$ , 作

$$A_1 = D^{-1}AD = (a_{ij}^{(1)}). \quad (8)$$

有

$$a_{ij}^{(1)} = d_i^{-1} a_{ij} d_j = \begin{cases} a_{ij} d_j, & i \in N_1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\ d^{-1} a_{ij} d_j, & i \in N_2, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

因此

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{ij}, & i \in N_1, \quad j \in N_1, \\ d^{-1}a_{ij}, & i \in N_2, \quad j \in N_1, \end{cases} \quad (9a)$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{ij}d, & i \in N_1, \quad j \in N_2, \\ a_{ij}, & i \in N_2, \quad j \in N_2. \end{cases} \quad (9b)$$

于是, 其对角元  $a_{ii}^{(1)} = a_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$ .

(i) 当  $i \in N_1$  时, 由式(9)有

$$a_i^{(1)} = \sum_{j \neq i} |a_{ij}^{(1)}| = \sum_{\substack{j \in N_1 \\ j \neq i}} |a_{ij}| + \sum_{\substack{j \in N_2 \\ j \neq i}} |a_{ij}d| = S_i + dh_i.$$

因  $S_i + h_i = a_i, S_i, h_i \geq 0$ . 若  $h_i > 0$ , 则由式(6)后一个不等式有

$$S_i + dh_i < S_i + \frac{|a_{ii}| - S_i}{h_j} h_i = |a_{ii}|;$$

若  $h_i = 0$ , 则

$$S_i + dh_i = S_i = a_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} < |a_{ii}|.$$

因  $N_1 \subset N^+$ , 即恒有

$$a_i^{(1)} = S_i + dh_i < |a_{ii}|, \quad i \in N_1. \quad (10)$$

(ii) 当  $i \in N_2$  时, 由式(9)和式(6)前两个不等式有

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= \sum_{j \neq i} |a_{ij}^{(1)}| = \sum_{\substack{j \in N_1 \\ j \neq i}} |d^{-1}a_{ij}| + \sum_{\substack{j \in N_2 \\ j \neq i}} |a_{ij}| = \\ &S_i \frac{1}{d} + h_i < S_i \frac{|a_{ii}| - h_i}{S_i} + h_i = |a_{ii}| \end{aligned}$$

即有

$$a_i^{(1)} = \frac{S_i}{d} + h_i < |a_{ii}|, \quad i \in N_2. \quad (11)$$

这样, 由式(10), (11)可知  $A_1$  为严格对角占优矩阵; 由引理 1 可知,  $A_1$  是非奇异  $H$  矩阵. 因为  $A_1 = D^{-1}AD$ , 所以有  $AD = DA_1$ , 而  $DA_1 = (d_ia_{ij}^{(1)})$ . 由于  $A_1$  为严格对角占优矩阵, 则有

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}^{(1)}| < |a_{ii}^{(1)}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

又因  $D$  为正对角矩阵, 即有  $d_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ . 于是有

$$\sum_{j \neq i} |d_ia_{ij}^{(1)}| < |d_ia_{ii}^{(1)}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

由式(12)可知,  $AD = DA_1$  为严格对角占优矩阵, 所以  $A$  为非奇异  $H$  矩阵. 证毕.

另外, 若  $[m(A^T)]^{-1} \geq 0$ , 则因  $m(A^T) = [m(A)]^T$ , 于是有

$$[m(A^T)]^{-1} = [(m(A))^T]^{-1} = [(m(A))^{-1}]^T,$$

所以得

$$[m(A)]^{-1} = [(m(A^T))^{-1}]^T \geq 0.$$

因此, 根据定义 4 的结论, 如果  $A^T$  为非奇异  $H$  矩阵, 则  $A$  亦为非奇异  $H$  矩阵. 由此据定理 1 可知, 对列亦有如下相应的定理.

**定理 2** 设矩阵  $A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$ ,  $A$  的  $\tilde{N} = \{i | \sum_{k \neq i} |a_{ki}| < |a_{ii}|\} \neq \emptyset$ . 任取一非空集  $\tilde{N}_1 \subset \tilde{N}$ , 若对  $i \in \tilde{N}_1, j \in \tilde{N}^+ = \{j | \sum_{k \neq j} |a_{kj}| \geq |a_{jj}|\}$ , 则有

$$\begin{aligned} \max_{j \in \tilde{N}^+} \frac{\tilde{S}_j}{|a_{jj}| - \tilde{h}_j} &< \tilde{d}_1^* < \tilde{d}_2^* = \\ &\min_{i \in \tilde{N}_1} \frac{|a_{ii}| - \tilde{S}_i}{\tilde{h}_i}, \end{aligned}$$

且

$$|a_{jj}| - \tilde{h}_j > 0, \quad j \in \tilde{N}^+;$$

若对一切  $i \in \tilde{N}_1, \tilde{h}_i = 0$ , 则规定  $\tilde{d}_2^* = +\infty$ ,  $A$  为非奇异  $H$  矩阵.

由定理 1, 2 及文[1, 6, 7]可得

**定理 3** 设线性方程组  $Ax=b$  的系数矩阵  $A=(a_{ij})$  满足定理 1 或定理 2 的条件, 则当  $0\leqslant r\leqslant\omega, 0<\omega<2/(1+\rho(|J|))$  时, 其中  $J$  为  $A$  的 Jacobi 迭代矩阵, 即

$$\begin{aligned} J &= I-D_A^{-1}A, \\ D_A &= \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}), \\ \rho(|J|) &< 1. \end{aligned}$$

解线性方程组  $Ax=b$  的 AOR 迭代法(它包含了 SOR 迭代法( $r=\omega$ )、Gauss-Seidel 迭代法( $r=\omega=1$ )、JOR 迭代法( $r=0$ )、Jacobi 迭代法( $r=0, \omega=1$ )) 和 SAOR 迭代法(它包含了 SSOR 迭代法( $r=\omega$ )) 均收敛.

### 3 数值例子

设线性方程组  $Ax=b$  的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-10 & 4 & -1 & 1 \\ 9 & 20 & 4 & -6 \\ -8 & 2 & -9 & 1 \\ -5 & 4 & -4 & 12\end{bmatrix}.$$

由  $\tilde{N}^- = \{i | \sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}|\}$ ,  $\tilde{N}^+ = \{j | \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \geq |a_{jj}|\}$  可知,  $\tilde{N}^- = \{1, 2\} \neq \emptyset, \tilde{N}^+ = \{3, 4\}$ . 取  $\tilde{N}_1 = \{1\}$ , 则  $\tilde{N}_2 = \{2, 3, 4\}$ . 又由  $S_i = \sum_{j \in \tilde{N}_1} |a_{ij}|$ ,  $h_i = \sum_{j \in \tilde{N}_2, j \neq i} |a_{ij}|$ , 得  $S_1 = 0, h_1 = 6; S_2 = 9, h_2 = 10; S_3 = 8, h_3 = 3; S_4 = 5, h_4 = 8$ . 对  $j \in \tilde{N}_1^+ = \{3, 4\}$  有,

$$|a_{33}| - h_3 = 6 > 0, \quad |a_{44}| - h_4 = 4 > 0.$$

又因

$$\begin{aligned} d_1^* &= \max_{j \in \tilde{N}_1^+} \frac{S_j}{|a_{jj}| - h_j} \min\left\{\frac{8}{6}, \frac{5}{4}\right\} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \\ d_2^* &= \max_{j \in \tilde{N}_1} \frac{|a_{ii}| - S_j}{h_j} = \frac{10-0}{6} = \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

所以有  $d_1^* < d_2^*$ . 由定理 1 可知,  $A$  为非奇异  $H$  矩阵, 则有  $\rho(|J|) < 1$ . 又因为  $2/(1+\rho(|J|)) > 2/(1+1) = 1$ , 于是由定理 3 可知, 当  $0 \leqslant r \leqslant \omega, 0 < \omega \leqslant 1$  时, 解此方程组  $Ax=b$  的 AOR 迭代法和 SAOR 迭代法均收敛.

### 参 考 文 献

- 1 胡家骥. 线性代数方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1991. 60~ 84
- 2 高中喜, 黄廷祝, 刘福体. 块  $H$  矩阵的简捷判据[J]. 工程数学学报, 2004, 21(3): 340~ 344
- 3 王广彬, 洪振杰. 非奇异  $H$  矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报, 2003, 25(2): 184~ 192
- 4 李继成, 黄廷祝, 雷光耀.  $H$  矩阵的实用判实[J]. 应用数学学报, 2003, 26(3): 413~ 419
- 5 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京: 清华大学出版社, 2001. 276~ 303
- 6 陈恒新. TOR, GAOR 和 GSAOR 迭代法收敛准则[J]. 应用数学, 1995, 8(4): 483~ 486
- 7 陈恒新. 关于 AOR 迭代法的研究[J]. 应用数学与计算数学学报, 2002, 16(1): 40~ 46

## The Criteria of Nonsingular $H$ -Matrices

Chen Hengxin

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

**Abstract** This paper gives some sufficient criteria, which can be used to discriminate a class of matrices  $A$  being the non-singular  $H$  matrices by simple and convenient method. By this way, we get the AOR and SAOR iterative convergence theorem for solving correlative linear equation group  $Ax=b$ .

**Keywords** nonsingular  $M$  matrix, nonsingular  $H$  matrix, criteria theorem, iterative