

文章编号 1000-5013(2006)01-0012-04

一类中立型泛函微分方程的概周期解及稳定性

王全义

(华侨大学数学系, 福建泉州 362021)

摘要 研究一类具有有限时滞的中立型泛函微分方程的概周期解的存在性、唯一性及稳定性等问题. 利用指数型二分性理论和不动点方法, 以及相关分析技巧, 得到关于该方程的概周期解的存在性、唯一性及稳定性的新结果.

关键词 中立型泛函微分方程, 概周期解, 存在性, 唯一性, 稳定性

中图分类号 O 175.6

文献标识码 A

文[1, 2]研究了具有无穷时滞的算子型的中立型泛函微分方程

$$\frac{d}{dt}(x(t) - \int_{-\infty}^t B(t, s)x(s)ds) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^t C(t, s)x(s)ds + f(t) \quad (1)$$

的概周期解的存在性及唯一性等问题. 然而, 对于一类具有有限时滞的非算子型的中立型泛函微分方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, x(t), x(t - \tau(t)), \dot{x}(t - \tau(t))) \quad (2)$$

的概周期解的存在性与唯一性等问题, 却很少有人研究过. 其中, $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$; $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$ 是 \mathbf{R} 上的 $n \times n$ 连续函数矩阵; $g(t, x, y, z)$ 是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 到 \mathbf{R}^n 的连续函数, $\tau(t)$ 是 \mathbf{R} 到 $[0, \tau_0]$ ($\tau_0 > 0$) 的连续函数. 本文将研究方程(2)的概周期解的存在性、唯一性及稳定性等问题, 利用指数型二分性理论、不动点方法及相关分析技巧, 得到了方程(2)存在唯一的、稳定的概周期解的新结果.

1 主要结果

对于方程(2), 有如下 4 个假设条件.

(1) $A(t)$ 是 t 的概周期函数矩阵, 且概周期函数 $a_1(t)$ 的平均值为

$$Ma_1 = \lim_{t-s \rightarrow +\infty} \frac{1}{(t-s)} \int_s^t a_1(r)dr = a_2 < 0 \quad (3)$$

在式(3)中, $a_1(t) = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_{jj}(t) + \sum_{i=1}^n |a_{ij}(t)|\}$.

(2) $g(t, x, y, z)$ 关于 t 对 $(x, y, z) \in S_1 \times S_2 \times S_3$ (其中 S_i 是 \mathbf{R}^n 中的任一紧集, $i = 1, 2, 3$), 是一致径等一列震源物理参数和传播介质参数, 采用物理模型求取近场地震动的各种参数. 这一方法受经验, 且存在非负的概周期函数 $b(t)$, 使得对任意的 $x_i, y_i, z_i \in \mathbf{R}^n, i = 1, 2$ 及任意的 $t \in \mathbf{R}$, 都有

$$\|g(t, x_1, y_1, z_1) - g(t, x_2, y_2, z_2)\| \leq b(t)[\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|]. \quad (4)$$

(3) $\tau(t)$ 是 t 的概周期函数, 且 $\tau(t) \geq r > 0$.

(4) 存在常数 $k > 0$, 使得 $ka_1(t) + b(t) \leq 0$, 且 $2k + 2kA_1 + 2b_1 < 1$. 其中 $a_1(t)$ 由条件(1)给出, $b(t)$ 由条件(2)给出, 而 $A_1 = \sup\{\|A(t)\| | t \in \mathbf{R}\}$, $b_1 = \sup\{b(t) | t \in \mathbf{R}\}$.

记 $C^{(1)} \stackrel{\Delta}{=} C^{(1)}([t_0 - \tau_0, t_0], \mathbf{R}^n) \stackrel{\Delta}{=} \{\varphi: [t_0 - \tau_0, t_0] \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ 具有有界的连续导数}\}$, 其中 $t_0 \geq 0$. 对任意 $\varphi \in C^{(1)}$, 我们定义 φ 的范数为 $\|\varphi\| = \|\varphi\|_0 + \|\varphi\|_1$, 其中 $\|\varphi\|_0 = \sup\{\|\varphi(\theta)\|_0 | t_0 - \tau_0 \leq \theta \leq$

收稿日期 2005-04-26

作者简介 王全义(1955-), 男, 教授, 主要从事常微分方程及泛函微分方程的研究. E-mail: qywang@hqu.edu.cn

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(01QZR02)

$t_0\}$, $\|\varphi\|_1 = \sup\{\|\varphi(\theta)\|_1 | t_0 - \tau_0 \leq \theta \leq t\}$, $\|\varphi(\theta)\|_0 = (\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(\theta))^{\frac{1}{2}}$, $\|\varphi(\theta)\|_1 = (\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(\theta))^{\frac{1}{2}}$.

于是, 易见 $C^{(1)}$ 在此范数下是一个 Banach 空间. 方程(2)的初始条件为

$$x(s) = \varphi(s), \quad \dot{x}(s) = \dot{\varphi}(s), \quad s \in [t_0 - \tau_0, t_0]. \quad (5)$$

在式(5)中, $\varphi \in C^{(1)}([t_0 - \tau_0, t_0], \mathbf{R}^n)$. 方程(2)的具有初始条件(5)的解, 将表示为 $x(t, t_0, \varphi)$ 或 $x(t, \varphi)$ 或 $x(t)$ (如果不会出现混淆的话).

定义 1 方程(2)的解 $x(t, t_0, \varphi_1)$ 在 $t \geq t_0$ 上存在, 且对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得对任意的 $\varphi_2 \in C^{(1)}([t_0 - \tau_0, t_0], \mathbf{R}^n)$. 只要 $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < \delta$ 就有

$$\|x(t, t_0, \varphi_1) - y(t, t_0, \varphi_2)\|_0 + \|x(t, t_0, \varphi_1) - y(t, t_0, \varphi_2)\|_1 < \varepsilon.$$

其中 $y(t, t_0, \varphi_2)$ 是方程(2)满足初始条件(5)的解, 则称方程(2)的解 $x(t, t_0, \varphi_1)$ 是一致稳定的.

定理 1 对于方程(2), 如果条件(1)~(4)成立, 则方程(2)存在唯一的、一致稳定的概周期解.

推论 1 对于方程(2), 如果定理 1 的条件成立, 且 $A(t)$, $g(t, x, y, z)$, $\tau(t)$ 都是 t 的 ω -周期函数, 则方程(2)存在唯一的、一致稳定的 ω -周期解.

2 一些引理

本节先给出一些有用的引理. 考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (6)$$

及

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g_1(t). \quad (7)$$

在式(6), (7)中, $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$ 是 \mathbf{R} 上的 $n \times n$ 连续函数矩阵, $g_1(t)$ 为 n 维概周期函数向量.

引理 1^[3] 设 $X(t)$ 是方程(6)的一个基本解方阵, 则有

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq \exp\left(\int_s^t a_1(r) dr\right), \quad t \geq s, \quad (8)$$

在式(8)中, $a_1(t) = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ a_{jj}(t) + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}(t)| \right\}$.

引理 2^[2] 对于方程(6), 如果 $A(t)$ 满足条件(1), 则方程(7)存在唯一的概周期解 $x(t)$. 它可以表示为

$$x(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s)g_1(s)ds, \quad (9)$$

其中 $X(t)$ 为方程(6)的一个基本解方阵.

引理 3 如果方程(2)满足条件(1), (2), 则方程(2)满足初始条件(5)的解在 $[t_0, +\infty)$ 上整体存在.

证 在方程(2)中, 对任意的 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, 取

$$f(t, x, y, z) = A(t)x + g(t, x, y, z), \quad (10)$$

并记 $A_1 = \sup\{\|A(t)\| : t \in \mathbf{R}\}$, $b = \sup\{b(t) : t \in \mathbf{R}\}$, $L = \max\{A_1, b\}$. 则对任意的 $x_i, y_i, z_i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, 2$, 有

$$\begin{aligned} \|f(t, x_1, y_1, z_1) - f(t, x_2, y_2, z_2)\| &\leq \|A(t)\| \|x_1 - x_2\| + b(t) [\|x_1 - x_2\| + \\ &\|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|] \leq 2L [\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| + \|z_1 - z_2\|]. \end{aligned}$$

从而由文[4]中的定理 1.1 可知, 方程(2)满足初始条件(5)的解整体存在.

3 定理的证明

(I) 定理 1 的证明. 记 $B = \{u | u: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ 为概周期函数且 } u(t) \text{ 也为概周期函数}\}$. 对任意 $u \in B$, 定义 u 的范数为 $\|u\| = \|u\|_0 + \|u\|_1$. 这里 $\|u\|_0 = \sup\{\|u(t)\|_0 : t \in \mathbf{R}\}$, $\|u\|_1 = \sup\{\|u(t)\|_1 : t \in \mathbf{R}\}$, $\|u(t)\|_0 = (\sum_{i=1}^n u_i^2(t))^{\frac{1}{2}}$, $\|u(t)\|_1 = (\sum_{i=1}^n \dot{u}_i^2(t))^{\frac{1}{2}}$. 则 B 在此范数下是一个 Banach 空间.

对任意的 $u \in B$, 由于 $u(t)$, $\dot{u}(t)$ 及 $\tau(t)$ 都是 t 的概周期函数, $u(t - \tau(t))$ 及 $\dot{u}(t - \tau(t))$ 也都是 t 的概周期函数, 从而由条件(2)可知, $g(t, u(t), u(t - \tau(t)), \dot{u}(t - \tau(t)))$ 也是 t 的概周期函数.

对任意的 $u \in B$, 考虑概周期微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t, u(t), u(t - \tau(t)), \dot{u}(t - \tau(t))). \quad (11)$$

由条件(1), (2) 及引理 2 可知, 方程(11)存在唯一的概周期解, 即

$$x_u(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s)g(s, u(s), u(s - \tau(s)), \dot{u}(s - \tau(s)))ds. \quad (12)$$

于是, 由式(11), (12)可知 $x_u \in B$. 现在作映射 $T: B \rightarrow B$, 即

$$Tu(t) = x_u(t), \quad \forall u \in B. \quad (13)$$

下面证明 $T: B \rightarrow B$ 是一个压缩映射. 首先, 对 $\forall u, v \in B$, 有

$$Tu(t) = x_u(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s)g(s, u(s), u(s - \tau(s)), \dot{u}(s - \tau(s)))ds, \quad (14)$$

$$Tv(t) = x_v(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s)g(s, v(s), v(s - \tau(s)), \dot{v}(s - \tau(s)))ds, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt}(Tu(t)) = \dot{x}_u(t) = A(t)Tu(t) + g(t, u(t), u(t - \tau(t)), \dot{u}(t - \tau(t))), \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt}(Tv(t)) = \dot{x}_v(t) = A(t)Tv(t) + g(t, v(t), v(t - \tau(t)), \dot{v}(t - \tau(t))). \quad (17)$$

于是, 由式(14), (15)和定理的条件及引理 1, 可得

$$\begin{aligned} \|Tu(t) - Tv(t)\|_0 &\leq [2\|u - v\|_0 + \|u - v\|_1] \int_{-\infty}^t \exp\left(\int_s^t a_1(r)dr\right)(-ka_1(s))ds = \\ &k[2\|u - v\|_0 + \|u - v\|_1]. \end{aligned} \quad (18)$$

因此, 有

$$\|Tu - Tv\|_0 \leq k[2\|u - v\|_0 + \|u - v\|_1]. \quad (19)$$

又由式(16)~(19)和定理的条件, 可得

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}(Tu(t)) - \frac{d}{dt}(Tv(t)) \right\|_0 &\leq A_1 \cdot \|Tu - Tv\|_0 + b(t)[\|u(t) - v(t)\|_0 + \\ &\|u(t - \tau(t)) - v(t - \tau(t))\|_0 + \|u(t - \tau(t)) - v(t - \tau(t))\|_1] \leq \\ &(2kA_1 + 2b_1)\|u - v\|_0 + (kA_1 + b_1)\|u - v\|_1, \end{aligned} \quad (20)$$

从而有

$$\|Tu - Tv\|_1 \leq (2kA_1 + 2b_1)\|u - v\|_0 + (kA_1 + b_1)\|u - v\|_1. \quad (21)$$

再由式(19)及(21), 即可得

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\| &= \|Tu - Tv\|_0 + \|Tu - Tv\|_1 \leq (2k + 2kA_1 + 2b_1)\|u - v\|_0 + \\ &(k + kA_1 + b_1)\|u - v\|_1 \leq k_1[\|u - v\|_0 + \|u - v\|_1] = k_1\|u - v\|. \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $k_1 = 2k + 2kA_1 + 2b_1 < 1$. 由此可知, $T: B \rightarrow B$ 是一个压缩映射. 因此由不动点定理可知, 存在唯一的一点 $x \in B$, 使得

$$Tx(t) = x(t), \quad t \in \mathbf{R} \quad (23)$$

此即

$$x(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s)g(s, x(s), x(s - \tau(s)), \dot{x}(s - \tau(s)))ds. \quad (24)$$

由式(24)的两边同时对 t 求导, 即可知 $x(t)$ 为方程(2)的唯一概周期解.

最后, 证明方程(2)的任一解都是一致稳定的. 由常数变易法可知, 对任意给定的 $t_0 \geq 0$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{(1)}([t_0 - \tau_0, t_0], \mathbf{R}^n)$, 方程(2)的解 $x(t) = x(t, t_0, \varphi_1)$ 及 $y(t) = y(t, t_0, \varphi_2)$ 可表示为

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\varphi_1(t_0) + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)g(s, x(s), x(s - \tau(s)), \dot{x}(s - \tau(s)))ds, \quad (25)$$

$$y(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\varphi_2(t_0) + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)g(s, y(s), y(s - \tau(s)), \dot{y}(s - \tau(s)))ds \quad (26)$$

在上两式中, $t \geq t_0$, 其中 $X(t)$ 为方程 (7) 的一个基本解方阵. 于是对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{[1 - (2k + 2kA_1 + 2b)]\varepsilon}{2(1 + A_1)} > 0$, 则当 $\|\varphi_1 - \varphi_2\| < \delta$ 时, 必有

$$\|x(t) - y(t)\|_0 + \|x(t) - y(t)\|_1 < \varepsilon \quad t \geq t_0; \tag{27}$$

否则, 必存在 $t_1 > t_0$, 使得

$$\|x(t) - y(t)\|_0 + \|x(t) - y(t)\|_1 < \varepsilon \quad t_0 \leq t < t_1, \tag{28}$$

而

$$\|x(t_1) - y(t_1)\|_0 + \|x(t_1) - y(t_1)\|_1 = \varepsilon. \tag{29}$$

于是由式 (25)~ (29) 及定理的条件, 可得

$$\begin{aligned} \|x(t_1) - y(t_1)\|_0 &\leq \exp\left(\int_{t_0}^1 a^1(r) dr\right) \cdot \delta + \int_{t_0}^1 \exp\left(\int_{t_0}^1 a^1(r) dr\right) \cdot b(s) [\|x(s) - y(s)\|_0 + \\ &\|x(s - \tau(s)) - y(s - \tau(s))\|_1] ds \leq \delta + \int_{t_0}^1 \exp\left(\int_{t_0}^1 a^1(r) dr\right) b(s) \cdot 2\delta ds \leq \\ &\delta + 2\varepsilon \int_{t_0}^1 \exp\left(\int_{t_0}^1 a^1(r) dr\right) \cdot (-ka^1(r)) ds \leq \delta + 2k\varepsilon. \end{aligned} \tag{30}$$

又因为

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, x(t), x(t - \tau(t)), \dot{x}(t - \tau(t))), \tag{31}$$

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + g(t, y(t), y(t - \tau(t)), \dot{y}(t - \tau(t))). \tag{32}$$

由定理的条件, 可得

$$\begin{aligned} \|x(t_1) - y(t_1)\|_1 &= \|\dot{x}(t_1) - \dot{y}(t_1)\|_0 \leq \\ &A_1(\delta + 3k\varepsilon) + b_1(t) [\|x(t_1) - y(t_1)\|_0 + \|x(t_1 - \tau(t_1)) - y(t_1 - \tau(t_1))\|_0 + \\ &\|x(t_1 - \tau(t_1)) - y(t_1 - \tau(t_1))\|_1] \leq A_1\delta + 2kA_1\varepsilon + 2b_1\varepsilon. \end{aligned} \tag{33}$$

从而由式 (29), (30) 和式 (33), 可得

$$\varepsilon = \|x(t_1) - y(t_1)\|_0 + \|x(t_1) - y(t_1)\|_1 \leq \delta + 2k\varepsilon + A_1\delta + 2kA_1\varepsilon + 2b_1\varepsilon < \varepsilon$$

这就发生了矛盾. 这个矛盾说明方程 (2) 的任意解都是一致稳定的.

(II) 推论 1 的证明. 容易证明此推论, 此处证略.

参 考 文 献

- 1 杨喜陶, 冯春华. 一类具有无穷时滞的中立型 Volterra 积分微分方程概周期解的存在唯一性[J]. 数学学报, 1997, 40 (3): 359~ 402
- 2 王全义. 一类中立型泛函微分方程的概周期解的存在唯一性与稳定性[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2002, 23(3): 222~ 228
- 3 王全义. 具无限时滞的积分微分方程的周期解的存在性、唯一性及稳定性[J]. 应用数学学报, 1998, 21(2): 312~ 318
- 4 郑祖庠. 泛函微分方程理论[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1994 204~ 206

The Almost Periodic Solutions to a Class of Neutral Functional Differential Equations and Their Stability

Wang Quanyi

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract The work deals with the almost periodic solutions to a class of neutral functional differential equations with finite delay. By applying exponential dichotomy theory and fixed point method as well as some skills of analysis, the author obtains some new results on the existence, uniqueness and stability of almost periodic solutions to these equations.

Keywords neutral functional differential equation, almost periodic solution, existence, uniqueness, stability