第 26 卷　第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 26　No. 4
2005 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 2005

文章编号　1000-5013(2005)04-0420-04

差分方程辨识稳定水位流量关系的实现

杨四海[①]　　周新志[②]

(① 华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021; ② 四川大学电子信息学院, 四川 成都 610064)

摘要　水位流量关系的确立是一个难题, 利用曼宁公式求解会产生较大误差. 文中利用基于差分方程的系统辨识方法, 描述稳定河道的水位流量关系; 利用实测水文数据与现有的各种方法进行对比研究. 仿真结果表明, 该方法可以较好地提高对水文数据的拟合精度.

关键词　系统辨识, 水位流量, 曼宁公式, 差分方程

中图分类号　TV 131.4; P 332.4　　文献标识码　A

水位流量关系曲线常用的计算公式(曼宁公式)为

$$Q = aH^b,$$

上式中, Q 为流量, H 为水位, a, b 为待定系数. 为求得参数 a, b, 传统方法一般先将上式两边取对数转化为线性方程, 即

$$\ln Q = \ln a + b\ln H.$$

再用最小二乘法求线性方程的参数, 经过逆变换后求出原方程的参数. 上述传统水位流量关系拟合方法存在以下 3 个方面的问题. (1) 经线性变换后再利用最小二乘方法求出的参数 a, b, 只能使取对数后的方程总残差达到最小, 并不能使方程 $Q = aH^b$ 的总残差达到最小. 因此, 不能认为曼宁公式所拟合的水位流量关系最优[1,2]. (2) 实际计算中, 水位的初始零点选取凭经验确定, 这导致了最后结果中的误差[3]. (3) 曼宁公式的推导基于宽浅人工渠道并采用了一些近似, 因而存在模型误差.

针对传统方法的种种缺陷, 目前已有学者提出了一些改进方法, 如直接拟合方法[1~2]、零点误差消除方法[3]和多项式拟合方法等. 直接拟合方法不取对数, 直接由公式求取曼宁公式参数, 因曼宁公式为非线性方程, 可考虑用遗传算法求解. 零点误差消除方法将传统模型变为 $Q = a(H + c)^b$. 为确定参数, 先按几何级数选取 3 个流量值, 使得 $Q_2^2 = Q_1Q_3$, 从曲线上查得相应水位 H_1, H_2, H_3, 利用

$$c = \frac{H_2^2 - H_1H_3}{H_1 + H_3 - 2H_2}$$

求得 c 后, 再用传统方法求解. 此外, 也可用遗传算法对参数 a, b, c 统一编码来直接求取参数最佳值. 多项式拟合方法将稳定的水位流量关系看作一种单值曲线, 用带一个未知数的多项式函数来逼近. 于是, 流量可以表示为水位的多项式函数 $Q = \sum_{i=0}^{m} a_iH^i$, 其中 m 为多项式的最高阶数. 上述改进方法均力求改进传统方法存在的问题, 在实际使用中能取得一定的效果.

1　基于差分方程的系统辨识方法

实际上, 任一确定季节时的确定河道可被近似认为是一个单输入、单输出(SISO)系统, 在给定一个输入(水位)时, 河道对应一固定输出(流量). 因而, 可考虑采用系统辨识的方法来进行处理. 此外, 传统方法和现有的改进方法都是以代数方程来描述水位流量关系. 由于河流可看作一个动态系统, 因而可以用微分或差分方程加以描述. 基于上述考虑, 可以采用基于差分方程的系统辨识方法来建立稳定河道的

收稿日期　2005-01-28

作者简介　杨四海(1975-), 男, 助教, 硕士, 主要从事智能计算与图像处理的研究. E-mail: ysh_12@163.com

水位流量关系. 采用基于差分方程的系统辨识方法来辨识一个系统, 主要的工作是确定系统模型的阶次和参数. 文中采用 F 阶检验法辨识系统的阶次, 并采用递推最小二乘法求解模型参数.

1.1　阶次辨识

对 SISO 线性系统而言, 由于实际动态过程总是存在惯性, 过程的响应将滞后于激励, 所以其实际模型形式可取为

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d) + e(t), \tag{1}$$

式(1)中, $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-1}$, $B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_n q^{-n}$. n 表示模型阶次, d 表示纯滞后时间, 此即为 SISO 模型的结构参数. 考虑如下模型的阶次检验问题, 有

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n} b_i u(k-i) + e(k),$$

取预报误差准则为

$$J(n) = \sum_{t=1}^{N} w^2(n, \hat{\theta}) = \sum_{t=1}^{N} \{y(k) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\theta}\}^2. \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \cdots, -y(k-n), u(k-1), \cdots, u(k-n)],$$
$$\hat{\theta} = [a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n]^{\mathrm{T}}.$$

判定模型阶次的问题可归结成给出一系列的 $n: n_1 < n_2 \cdots$, 相应的参数估计记为 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots$. 计算 J 的值, 得 $J(n_1, \hat{\theta}_1), J(n_2, \hat{\theta}_2), \cdots$. 取当 n 增加时 J 无明显变化的 n_i 作为阶的估计值. 由于干扰误差 $e(t)$ 的存在, 当阶次从 n_1 增加到 n_2 时, $J(n_1)$ 到 $J(n_2)$ 是否有显著变化只能用统计的方法加以判断. 设模型的真实阶为 n, $n_2 > n_1$ 是两个被检验的阶次, 则 n 的确定可以提成如下的假设检验问题. 即 $H_0: n_2 > n_1 \geqslant n$. 若 H_0 成立, 则 J 的下降不明显, 即 $J(n_1) - J(n_2)$ 不显著; 如果 $J(n_1) - J(n_2)$ 不显著, 则接受 H_0, 即认为此时的 n_1 和 n_2 已接近真实阶次 n 了. 对一般线性动态模型

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1}) \cdot u(1-d) + e(t),$$

由于有 $2n$ 个参数, 当干扰 $e(t)$ 是独立正态变量时, 其统计量为

$$\tau = \frac{J(n_1) - J(n_2)}{J(n_2)} \cdot \frac{N - 2n_2}{2(n_2 - n_1)}. \tag{3}$$

服从渐近 $F(2(n_2 - n_1), N - 2n_2)$ 分布, 并用于检验 H_0[4].

1.2　模型参数计算

对 SISO 系统差分方程的参数估计, 是在系统阶已确定的假设下进行的. 对模型

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n} b_i u(k-i) + e(k) \tag{4}$$

而言, 它的元素都是第 k 次采样前的输入与输出测量值, 所以是已知的. 于是, 式(4)可变换为

$$y(k) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\theta + e(k) \tag{5}$$

设 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计, 则 $\hat{\theta}$ 与输入、输出测量值之间关系可表达为

$$y(k) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\theta} + \varepsilon(k). \tag{6}$$

$\varepsilon(k)$ 是用 $\hat{\theta}$ 去拟合输入和输出测量值序列之间关系的差分方程时所残留的差值, 称为残差. 令

$$J = \varepsilon^2(k-N+1) + \varepsilon^2(k-N+2) + \cdots + \varepsilon^2(k). \tag{7}$$

则 J 就是 N 个残差的平方和, 使 J 最小的参数估计 $\hat{\theta}_{LS}$ 被称为最小二乘估计. 在水位流量关系中, 需要对参数进行在线估计, 利用新的观测数据来不断改进参数估计或跟踪受控对象的参数变化. 如果采用批量算法, 显然是不现实的. 因此, 应考虑采用递推算法, 有

$$\boldsymbol{P}(k+1) = \boldsymbol{P}(k) - \frac{\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{x}(k+1)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}(k)}{1 + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{x}(k+1)}, \tag{8}$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \frac{\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{x}(k+1)[y(k+1) - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)\hat{\theta}(k)]}{1 + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{P}(k+1)}. \tag{9}$$

式(8), (9)组成了最小二乘估计的递推算法. 该算法克服了批量算法的缺点, 具有计算量小、占用存储空间小的特点, 适合于在线实时辨识.

2　仿真研究

利用四川省都江堰灌区部分水文数据进行仿真研究,如表1所示. 误差准则 E_p 为累计平方误差, E_f 为累计绝对值误差. (1) 采用传统算法求得 $a=2.913$, $b=2.3705$. 于是,可以得到水位流量关系为 $Q=2.913\cdot H^{2.3705}$. (2) 采用遗传算法[5]直接拟合时,取种群大小为30,最大进化代数为800,交叉概率为0.2,变异概率为0.01,染色体长度为24,评价函数为 $f(x)=3/(s-1)$. 其中 $s=\sum_{i=1}^{n}|Q_i-aH_i^b|$, a, b 统一编码,各占12位,可得最佳个体为12 633 410. 经解码得 $a=3.259$, $b=1.986$. 所得相应水位流量关系为

表1　四川省都江堰灌区某处水位流量关系数据

H	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80
Q	0.40	0.87	1.40	1.99	2.62	3.26	3.97	4.71	5.51	6.40	7.23	8.33	9.35	10.4

$$Q=3.259\cdot H^{1.986}.$$

(3) 采用零点误差消除方法. 由原始水文数据(表1中的数据由原始水文数据中抽出),在 $Q_1=0.54$, $Q_2=2.31$, $Q_3=9.88$ 时能满足. $Q_2^2=Q_1Q_3$. 相应水位为

$$H_1=0.53,\qquad H_2=0.85,\qquad H_3=1.75.$$

由公式

$$c=\frac{H_2^2-H_1H_3}{H_1-2H_2+H_3}$$

可求得 $c=-0.35345$. 取对数后,由最小二乘法则计算得 $a=6.0745$, $b=1.404$. 于是,改造后的曼宁公式为

$$Q=6.0745(H-0.35345)^{1.404}.$$

也可采用遗传算法统一求解参数 a, b, c. 此时,求解方法与采用遗传算法直接拟合曼宁公式类似. 所得结果为 $a=5.294$, $b=1.584$, $c=0.2686$. (4) 采用辨识方法的实际计算过程是,使用递推最小二乘算法计算 θ 时,首先进行初始化. 取 $\theta=0$, $P(0)=10^6 I$, 其中 I 是 $2n\times 2n$ 维单位阵. 可以验证,利用式(8),(9),从 $k=1$ 开始计算,当 $k\geqslant 2n$ 时就会得到逼近于批量算法初始化的效果. 根据表1中的数据,分别令模型阶次为1,2,3,可求得相应的参数值,分别为

$$\theta_1^{\mathrm{T}}=[-0.9465,\ 0.9078],$$

$$\theta_2^{\mathrm{T}}=[-1.3166,\ 0.3133,\ 2.1573,\ -1.8435],$$

$$\theta_3^{\mathrm{T}}=[-1.3607,\ 0.6029,\ -0.2504,\ 2.6016,\ -2.2072,\ -0.0077].$$

由式(7)可得其拟和残差,分别为

$$J_1=0.0100,\qquad J_2=0.0042,\qquad J_3=0.0039.$$

在求得 J_1, J_2 和 J_3 后,可由式(3)计算出

$$\tau_1=6.9048,\qquad \tau_2=0.3077.$$

因为 τ 服从渐近 $F(2(n_2-n_1),\ N-2n_2)$ 分布,取置信度 $\alpha=0.05$, 由 F 分布表可查得 $F_\alpha(2,12)=3.89$, $F_\alpha(2,10)=4.10$, 则可得系统阶次为2. 在判定系统阶次为2后,根据所求参数,则水位流量关系可被描述为

$$y(k)=1.3166y(k-1)-0.3133y(k-2)+2.1573u(k-1)-1.8435u(k-2).$$

总结以上各方法结果(多项式拟和方法由于较易计算,此处从略),可得仿真结果,如表2所示.

表2　仿真结果

误差准则	传统方法	遗传算法	消零传统	消零遗传	多项式一	多项式二	多项式三	多项式四	辨识一阶	辨识二阶
E_p	3.496	0.341	0.094	0.030	1.870	0.006	0.004	0.003	0.010	0.004
E_f	5.043	1.346	0.895	0.485	4.466	0.253	0.196	0.185	0.310	0.183

3　水位流量关系曲线的绘制

在求得上述二阶非齐次常系数差分方程后,由水位测取时存在的等间隔特性,可将方程改写为

$$y(n+2) - 1.3166y(n+1) + 0.3133y(n) = 0.0314n + 0.3413.$$

其中, n 为表 1 中数据编号. 根据表 1 中前两组数据, 解此方程可得

$$y(n) = 2085.8 \times 1.0048^n + 0.0329 \times 0.3118^n - 9.5401n - 2085.8.$$

于是, 水位流量关系表达式可被描述为

$$Q = 2085.8 \times 1.0048^{10H-4} + 0.0329 \times 0.3118^{10H-4} - 9.5407H - 2047.7.$$

根据上式, 可绘制水位流量关系曲线, 如图 1 所示. 图中“+ ”号为表 1 中原始水文数据点.

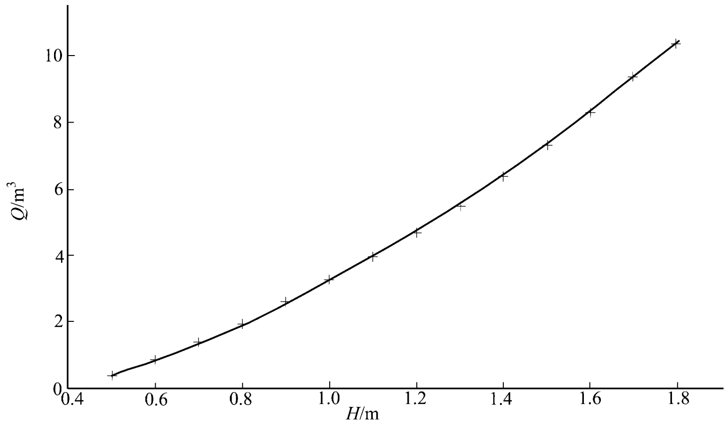

图 1　辨识方法得到的水流关系曲线

4　结束语

水位流量关系的确立是一个比较困难的问题. 假定具体河道为一个 SISO 系统后, 可以根据系统辨识的方法加以处理. 文中利用基于差分方程的系统辨识方法, 考察了稳定河道水位流量关系的确立, 并与已知的其他方法作了对比计算. 从仿真计算结果可以看出, 采用辨识方法可达到更令人满意的效果. 这说明, 利用该方法建立稳定河道水位流量关系具有有效性和适用性.

参　考　文　献

1　杨晓华, 陆桂华, 郦建强. 自适应加速遗传算法及其在水位流量关系拟合中的应用[J]. 水文, 2002, 22(2): 14~ 18

2　黄才安. 水位流量关系曲线的直接拟合[J]. 水利科技与经济, 1995, (6): 47~ 48

3　唐国田, 张　婷. 稳定水位流量关系数学模型的确立[J]. 吉林水利, 1990, (1): 26~ 28

4　王祯学, 古钟璧. 系统辨识与自适应控制[M]. 成都: 四川科学技术出版社, 1998. 81~ 84

5　王小平, 曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002. 13~ 36

The Implementation of the Identification to the Steady Relationship between Waterlevel and Waterflow with the Difference Equations

Yang Shihai①　　Zhou Xinzhi②

(① College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China;

② School Electicity and Electronic Information, Sichuan University, 610064, Chengdu, China)

Abstract　To establish relationship between water level and water flow is a difficult problem, and to solve by using Manning's formula will engender fairly great error. The authors describe the relation betw een water level and water flow of a steady river course by using the method of difference equation-based system identification; and carry out a comparative study by using measurement of hydrological data and various methods now available. As indicated by simulated results, the method notably improve the precision of fit of hydrological data, it is of effectiveness and usability.

Keywords　system identification, relationship beween water level and water flow, Manning′s formula, difference equation