

文章编号 1000-5013(2005)04-0416-04

几种常见信号波形的逆变换计算()

奇偶对称三角波与锯齿波和整流余弦波的逆变换

苏武浔 张渭滨 王建成

(华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要 应用 Mobius 变换, 对 5 种常用数字信号的傅里叶级数进行逆变换运算, 得到正、余弦函数, 以及一般周期信号对信号的展开. 求得在这些非正交信号基函数上的展开系数, 以及与展开基函数族相正交的非正交函数族.

关键词 Mobius 变换, 傅里叶级数, 逆变换, 周期信号, 信号展开, 非正交函数族, 展开系数

中图分类号 O 411.1; TN 911.72

文献标识码 A

我国著名学者陈难先院士等人, 应用 Mobius 变换进行了相关研究^[1~14]. 本文是文 [15] 的后续工作, 给出奇对称与偶对称三角波、锯齿波、半波余弦与全波余弦信号的逆变换计算结果.

1 偶对称三角波和半波余弦与全波余弦信号的逆变换计算

1.1 波形与傅里叶级数

(1) 偶对称三角波的波形, 如图 1 所示. 将其展开为傅里叶级数^[16], 有

$$f_{\text{et}}(t) = \frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4E \sin^2(\frac{n}{2})}{(n)^2} \cdot \cos(n t).$$

将其改写成

$$F_{\text{et}}(t) = f_{\text{et}}(t) - \frac{E}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4E \sin^2(\frac{n}{2})}{(n)^2} \cos(n t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\text{et}}(n) \cos(n t).$$

其中 $r_{\text{et}}(n) = \frac{4E \sin^2(\frac{n}{2})}{(n)^2}$. (2) 半波余弦信号的波形, 如图 2 所示. 将其展开为傅里叶级数^[16], 有

$$f_{\text{h,cos}}(t) = \frac{E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E}{1-n^2} \cos(\frac{n}{2}) \cos(n t).$$

将其改写成

$$F_{\text{h,cos}}(t) = f_{\text{h,cos}}(t) - \frac{E}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E}{1-n^2} \cos(\frac{n}{2}) \cos(n t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\text{h,cos}}(n) \cos(n t),$$

其中 $r_{\text{h,cos}}(n) = \frac{2E}{1-n^2} \cos(\frac{n}{2})$. 由 $r_{\text{h,cos}}(n)$ 表达式可看出, 只有当 $n=2k$ 时, 才不为零. 而 $r_{\text{h,cos}}(1) =$

$\frac{2E}{1-1^2} \cos \frac{1}{2} = \frac{2E}{-2} \cos \frac{1}{2} = -E \cos \frac{1}{2}$. (3) 全波余弦信号的波形, 如图 3 所示. 将其展开为^[16]

$$f_{\text{f,cos}}(t) = \frac{2E}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4E(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos(n t),$$

收稿日期 2004-08-12

作者简介 苏武浔(1947-), 男, 教授, 主要从事电路理论与通信工程的研究. E-mail: suwuxun@hqu.edu.cn

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(04QZR10)

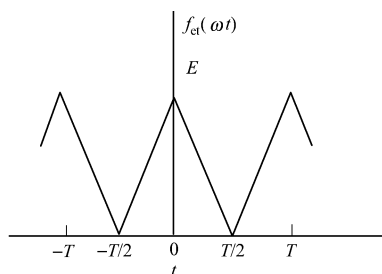


图 1 偶对称三角波的波形

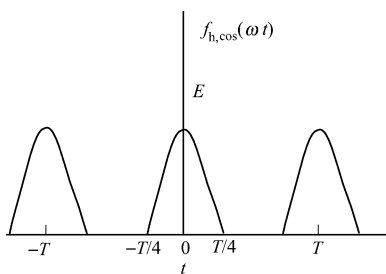


图 2 半波余弦的波形

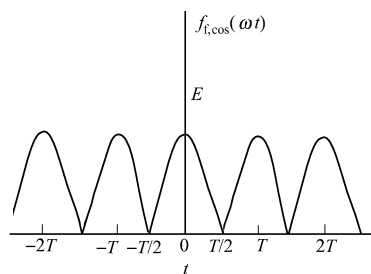


图 3 全波余弦的波形

可改写成

$$F_{f,\cos}(t) = f_{f,\cos}(t) - 2E = \sum_{n=1} \frac{4E}{4n^2 - 1} (-1)^{n+1} \cos(n\pi t) = \sum_{n=1} r_{f,\cos}(n) \cos(n\pi t),$$

$$\text{其中 } r_{f,\cos}(n) = \frac{4E}{4n^2 - 1} (-1)^{n+1}.$$

1.2 cos(t) 对偶对称三角波或半波余弦或全波余弦信号的逆变换

用 $F_{\text{even}}(t)$ 来代表 $F_{\text{et}}(t)$, $F_{h,\cos}(t)$ 或者 $F_{f,\cos}(t)$, 并设 $^{(1)}\cos(t) = \sum_{n=1} I_{\text{even}}(n) F_{\text{even}}(n\pi t)$. 那么, 就有 $\cos(t) = \sum_{n=1} I_{\text{even}}(n) \sum_{m=1} r_{\text{even}}(m) \cos(mn\pi t)$. 令 $mn = k$ ($r_{\text{even}}(\frac{k}{n})$ 代表 $r_{\text{et}}(n)$, $r_{h,\cos}(n)$ 或者 $r_{f,\cos}(n)$), 有

$$\cos(t) = \sum_{k=1} \sum_{mn=k} I_{\text{even}}(n) r_{\text{even}}(\frac{k}{n}) \cos(k\pi t) = \sum_{k=1} \sum_{n \dots k} I_{\text{even}}(n) r_{\text{even}}(\frac{k}{n}) \cos(k\pi t).$$

值得注意的是, $\sum_{n \dots k} I_{\text{even}}(n) r_{\text{even}}(\frac{k}{n})$ 的求和表示对每一个 k 中的多个整数因子 n 求和 (包括 1 和 k). 由此可得 $\sum_{n \dots k} I_{\text{even}}(n) r_{\text{even}}(\frac{k}{n}) = k!$, 并可递推解得 $I_{\text{even}}(n)$ 的各个值. 这样就求出了 $\cos(t)$ 按偶对称三角波

或半波余弦或全波余弦展开的逆变换式, 即 $\cos(t) = \sum_{n=1} I_{\text{even}}(n) F_{\text{even}}(n\pi t)$. 开始的几个 $I_{\text{even}}(n)$ (也是一般的 Mobius 变换的系数 $I(n)$) 的计算公式, 已在上一部分给出, 不再重复了. 对于各个展开, 应考虑与矩形脉冲同样的问题.

1.3 一般偶函数对 $F_{\text{even}}(t)$ 的展开

设对任意偶函数 $g(t) = G_0 + \sum_{n=1} a(n) \cos n\pi t$. 那么, 有

$$G(t) = g(t) - G_0 = \sum_{n=1} a(n) \cos n\pi t = \sum_{n=1} a(n) \sum_{m=1} I_{\text{even}}(m) F_{\text{even}}(mn\pi t).$$

令 $mn = k$, 则 $\sum_{k=1} \sum_{n \dots k} a(n) I_{\text{even}}(\frac{k}{n}) F_{\text{even}}(k\pi t) = \sum_{k=1} C(k) F_{\text{even}}(k\pi t)$, 而 $C(k) = \sum_{n \dots k} a(n) I_{\text{even}}(\frac{k}{n})$. 逆变换系数 $C(k)$ 的一般形式与前相同, 只是后面的 $I(n)$ 是由不同的 $r(n)$ 计算得来的. 类似前一部分, 可以把 $C(k)$ 写成与前同样形式, 并得到 $C(k) = \frac{1}{2} \int_{t=0}^2 G(t) \tilde{F}_K(t) d(t)$, 其中 $\tilde{F}_K(t) = \sum_{n \dots k} I_{\text{even}}(\frac{k}{n}) \cos n\pi t$. 同样可以证明, $\tilde{F}_K(t)$ 与 $F_{\text{even}}(t)$ 是正交的. 即 $\int_{t=0}^2 F_{\text{even}}(l\pi t) \tilde{F}_K(t) d(t) = \delta_{k,l}$. 找到与 $F_{\text{even}}(t)$ 正交的函数族 $\tilde{F}_K(t)$ 是很重要的, 它可用于 $C(k)$ 的计算与对 $G(t)$ 所携带信息的解调.

2 奇对称三角波与锯齿波的计算

2.1 波形与傅里叶级数

(1) 奇对称三角波的波形, 如图 4 所示. 将其展开为傅里叶级数^[16], 有

$$f_{ot}(t) = \sum_{n=1} \frac{4E \sin(\frac{n\pi}{2})}{(n)^2} \cdot \sin(n\pi t) = \sum_{n=1} r_{ot}(n) \cdot \sin(n\pi t).$$

其中 $r_{ot}(n) = \frac{4E \sin(\frac{n}{2})}{(n)^2}$. (2) 锯齿波的波形, 如图 5 所示. 将其展开为傅里叶级数^[16], 有 $f_{sw}(t) = \frac{E}{2}$

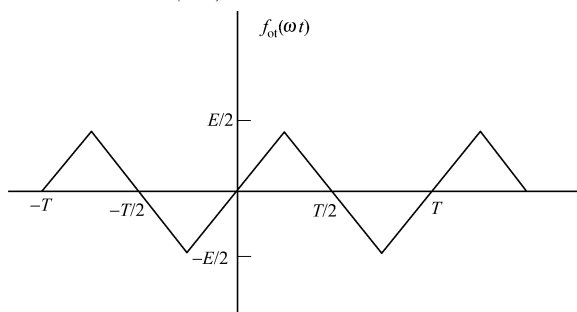


图 4 奇对称三角波的波形

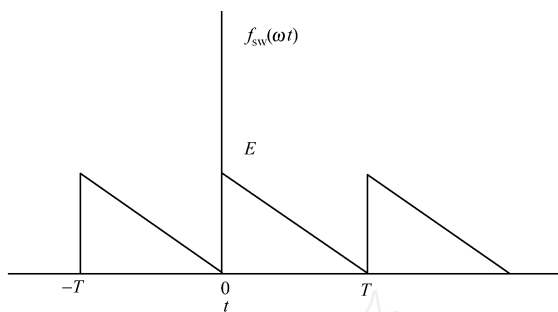


图 5 锯齿波的波形

$+ \frac{E}{n} \sin(n t)$, 并改写为

$$F_{sw}(t) = f_{sw}(t) - \frac{E}{2} = \sum_{n=1} \frac{E}{n} \sin(n t) = \sum_{n=1} r_{sw}(n) \sin(n t).$$

其中 $r_{sw}(n) = \frac{E}{n}$.

2.2 $\sin(t)$ 逆变换

现在来求 $\sin(t)$ 对奇对称三角波或锯齿波的逆变换^[1]. 设 $\sin(t) = \sum_{n=1} I_{odd}(n) f_{odd}(n t)$, $f_{odd}(n t)$ 代表 $f_{ot}(n t)$ 或者 $F_{sw}(n t)$, 那么, 就有 $\sin(t) = \sum_{n=1} I_{odd}(n) \sum_{m=1} r_{odd}(m) \sin(m n t)$ ($r_{odd}(n)$ 代表 $r_{ot}(n)$ 或 $r_{sw}(n)$). 令 $m n = k$, 有

$$\sin(t) = \sum_{k=1} \left[\sum_{mn=k} I_{odd}(n) r_{odd}\left(\frac{k}{n}\right) \right] \sin(k t) = \sum_{k=1} \left[\sum_{n \dots k} I_{odd}(n) r_{odd}\left(\frac{k}{n}\right) \right] \sin(k t).$$

类似可得, $\sum_{n \dots k} I_{odd}(n) r_{odd}\left(\frac{k}{n}\right) = \delta_{k1}$, 并递推解得 $I_{odd}(n)$ 的各个值. 这样就求出了 $\sin(t)$ 按奇对称方波展开的逆变换式 $\sin(t) = \sum_{n=1} I_{odd}(n) f_{odd}(n t)$. 展开时, 同样也要注意前述类似的问题.

2.3 一般奇函数的展开

设对任意奇函数 $Q(t) = \sum_{n=1} b(n) \sin n t$, 有 $Q(t) = \sum_{n=1} b(n) \sin n t = \sum_{n=1} b(n) \sum_{m=1} I_{odd}(m) f_{odd}(m n t)$. 令 $m n = k$, $Q(t) = \sum_{k=1} \left[\sum_{n \dots k} b(n) I_{odd}\left(\frac{k}{n}\right) \right] f_{odd}(k t) = \sum_{k=1} C_{odd}(k) f_{odd}(k t)$, 而 $C_{odd}(k) = \sum_{n \dots k} b(n) I_{odd}\left(\frac{k}{n}\right)$ 应用与求得矩形脉冲展开系数的同样方法, 则可以写成 $C_{odd}(k) = \frac{1}{t} \int_0^t Q(t) \tilde{f}_{odd k}(t) dt$, 其中 $\tilde{f}_{odd k}(t) = \sum_{n \dots k} I_{odd}\left(\frac{k}{n}\right) \sin n t$. 同样, 可以用类似的方法证明, $\tilde{f}_{odd k}(t)$ 与 $f_{odd}(l t)$ 是正交的. 即有 $\frac{1}{t} \int_0^t f_{odd}(l t) \tilde{f}_{odd k}(t) dt = \delta_{kl}$ 由此求得的 $\tilde{f}_{odd k}(t)$, 并可用于 $C_{odd}(k)$ 的计算与对 $Q(t)$ 所携带信息的解调.

3 结论

前面给出的是计算结果, 连同文[15], 共计算了 8 种数字信号的逆变换. 对这些结果及其收敛问题, 与文[15]有类似的讨论, 这里不再赘述. 对这些结果的应用, 我们将在今后的工作中陆续作出. 首先, 是应用在通信系统的框架设计, 希望能设计出应用 Mobius 变换的斜正交调制解调系统. 应用 Mobius 变换对傅里叶变换进行逆变换计算的结果, 得到了把一般周期信号在各种斜正交的数字信号基函数族上进行展开的方法. 同时, 也求得了另一族与展开基函数族相正交的函数族. 此函数族本身也是斜正交的,

它不仅可用于展开系数的计算,也为一般周期函数可能携带的信息的解调,预示了其应用的前景.

本文得到中国科学院院士、清华大学物理系陈难先教授的热情指导和有益的讨论,特此致谢.

参 考 文 献

- 1 Chen Nanxian. Modified mobius inverse formula and its applications in physics [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64 (11): 1 193 ~ 1 195
- 2 Chen Nanxian, Li Gangying. Theoretical investigation on the inverse black-body radiation problem[J]. IEEE T Antenn Propag, 1990, 38(8): 1 287 ~ 1 290
- 3 Rosu H. Mobius inverse problem for distorted black holes() [J]. Nuovo Cimento, 1993, 108B(12): 1 333 ~ 1 339
- 4 Xie Tading, Goldsmith P F. A new method for analyzing IRAS data to determine the dust temperature distribution [J]. Astrophys J, 1991, 371: 31 ~ 34
- 5 Wang Jieming. Temperature distribution of accretion disks in active galactic nuclei[J]. Astrophys J, 1996, 469: 564 ~ 571
- 6 Chen Nanxian. Closed-form solution for inverse problems of Fermi systems[J]. Phys Rev, 1993, E48(2): 1 558 ~ 1 561
- 7 Chen Nanxian, Chen Zhaodou, Wei Yucuan. Multidimensional inverse lattice problem and a uniformly sampled arithmetic Fourier transform[J]. Phys Rev, 1997, E55: R5 ~ R8
- 8 Ge Xijin, Chen Nanxian. Selective field evaporation in field-ion microscopy for ordered alloys[J]. J Appl Phys, 1999, 85(7): 3 488 ~ 3 493
- 9 Chen Nanxian. Theoretical study on the phase stability, site preference, and lattice parameters for $Gd(Fe, T)_{12}$ [J]. J Phys-Condens Mat, 2001, 13(11): 2 727 ~ 2 736
- 10 Zhang Shuo, Chen Nanxian. Determination of the B1-B2 transition path in RbCl by Mobius pair potentials[J]. Philos Mag, 2003, 83: 1 451 ~ 1 461
- 11 Zhang Shuo, Chen Nanxian. Ab initio interionic potentials for NaCl by multiple lattice inversion[J]. Phys Rev, 2002, B66: 1 ~ 10
- 12 Wei Yucuan, Chen Nanxian. Square wave analysis[J]. J Math Phys, 1998, 39(8): 4 226 ~ 4 245
- 13 陈难先. Fermi 体系逆问题的一种新解法[J]. 自然科学进展, 2003, 13(5): 473 ~ 477
- 14 Maddox J. Mobius and problems of inversion[J]. Nature, 1990, 344(29): 377
- 15 苏武浔, 张渭滨, 王建成. 几种常见信号波形的逆变换计算()——矩形脉冲与奇偶对称方波的逆变换[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2005, 26(1): 80 ~ 84
- 16 张渭滨. 信号与线性系统[M]. 广州: 暨南大学出版社, 1998. 403 ~ 406

Computing the Inverse Transform of Some Common Signal Waveforms ()

The Inverse Transform of Triangular Wave with Even-Odd

Symmetry and Rectifying Cosine Wave

Su Wuxun Zhang Weibin Wang Jiancheng

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract The inverse transform of Fourier series of five digital signals in common use is operated by applying Moebius transformation. As its results, the authors obtain the expansionsps of sine, cosine function and their general periodic signals into these digital signals; and solve also the expanded coefficient of the non-orthogonal functional family which are perpendicular to the expanding base function family.

Keywords Mobius(Mo'bius) transformation, Fourier series inverse transform, periodic signals, signal expansion, non-orthogonal function family, expansion coefficient