第 26 卷 第 4 期 华 侨 大 学 学 报 (自 然 科 学 版) Vol. 26 No. 4
2005 年 10 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct. 2005

文章编号 1000-5013(2005)04-0404-04

ITAE 最优控制的逆问题

李钟慎 洪 健 王永初

(华侨大学机电及自动化学院,福建 泉州 362021)

摘要 用 ITAE(时间误差绝对值)最优控制确定状态反馈增益阵 K,给出计算加权矩阵 Q 的参数化公式,并用例子证明这种确定加权矩阵 Q 方法的有效和简便. 研究结果揭开 ITAE 最优传递函数与加权矩阵 Q,R 的相互关系,有利于认识 ITAE 最优控制的本质.

关键词 ITAE,最优控制,状态反馈增益阵,Riccati 方程,加权矩阵

中图分类号 TP 273;O231 **文献标识码** A

最优状态反馈控制器通常有两种设计方法,一种是线性二次型最优设计方法(简称 LQ 设计方法),另一种是最优传递函数设计方法. 这两种方法的控制律都为 $u(t) = -Kx(t)$. 前者需解 Riccati 代数方程才能求得状态反馈增益阵 K,且最优性能指标中的加权矩阵 Q,R 的选择具有许多人为因素. 系统性能严重依赖于加权矩阵 Q,R 的选择[1],文[2,3]对加权矩阵 Q,R 的选择进行了研究. 后者使系统的闭环传递函数等于所选定的最优传递函数,通过简单的代数运算就可求得状态反馈增益阵 K[4]. ITAE 最优控制就是利用 ITAE 最优传递函数,将被控对象设计成最优控制系统[5]. 因此,本文将上述两种方法联系起来,先用 ITAE 最优控制的设计方法确定状态反馈增益阵 K,然后根据 LQ 设计方法反过来选择加权矩阵 Q,R.

1 ITAE 最优控制

具有 ITAE 最优调节律的闭环传递函数,有位移、匀速和匀加速无静差 ITAE 最优传递函数. 位移无静差 ITAE 最优传递函数具有较好的平稳性和快速性,其超调量不大于 ±5 %,调节时间不大于 8 个标准时间. 这是一组适用于工程控制系统的最优参数[5]. 因此,本文以位移无静差 ITAE 最优传递函数为例研究 ITAE 控制的逆问题. 文中的 ITAE 最优传递函数均为位移无静差 ITAE 最优传递函数. ITAE 最优传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_c^n}{s^n + \beta_{n-1}\omega_c s^{n-1} + \cdots + \beta_1 \omega_c^{n-1} s + \beta_0 \omega_c^n}. \tag{1}$$

表 1 给出了式(1)中的系数. 其状态方程为

$$\dot{x} = A_M x + B_M u, \tag{2}$$

表 1 ITAE 最优传递函数的系数表

n	β_7	β_6	β_5	β_4	β_3	β_2	β_1	β_0	n	β_7	β_6	β_5	β_4	β_3	β_2	β_1	β_0
1	-	-	-	-	-	-	-	1.00	5	-	-	-	2.80	5.00	5.50	3.40	1.00
2	-	-	-	-	-	-	1.41	1.00	6	-	-	3.25	6.60	8.60	7.45	3.95	1.00
3	-	-	-	-	-	1.75	2.15	1.00	7	-	4.48	10.42	15.05	13.54	10.64	4.58	1.00
4	-	-	-	-	2.10	3.40	2.70	1.00	8	5.20	12.80	21.60	25.75	22.20	13.30	5.15	1.00

收稿日期 2005-03-19

作者简介 李钟慎(1971-),男,副教授,博士研究生,主要从事最优控制和预测控制的研究. E-mail:lzscyw@hqu.edu.cn

基金项目 福建省自然科学基金资助项目(A0410020)

在式(2)中

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & & I_{n-1} & \\ -\beta_0\omega_c^n & -\beta_1\omega_c^{n-1} & \cdots & -\beta_{n-1}\omega_c \end{bmatrix}. \tag{3}$$

对于一个单输入可控系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{4}$$

总存在一个线性变换,使之成为可控标准形

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & I_{n-1} & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

反馈控制律

$$u = -Kx. \tag{6}$$

则闭环系统为

$$\dot{x} = (A - BK)x, \tag{7}$$

式中

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & & I_{n-1} & \\ (-a_0 - k_0) & (-a_1 - k_1) & \cdots & (-a_{n-1} - k_{n-1}) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

要想使该系统的闭环传递函数等于 ITAE 最优传递函数,则

$$A - BK = A_M. \tag{9}$$

定理 1　若矩阵 A, AB 为可控标准形,则 ITAE 最优控制的状态反馈增益阵为

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] = [\beta_0\omega_c^n - a_0 \quad \beta_1\omega_c^{n-1} - a_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}\omega_c - a_{n-1}]. \tag{10}$$

证明　将式(3)和式(8)代入式(9),即得式(10).

2　确定加权矩阵 Q 的方法

对于单输入系统(4)来说,若取加权矩阵 R = 1,则二次型性能指标为

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^2)\,dt, \tag{11}$$

式(11)中, Q 为加权矩阵,要求 Q 是对称矩阵,并且是半正定矩阵.

由最优控制理论可知,使式(11)极小的最优控制律为

$$u = -Kx = -B^T P x, \tag{12}$$

式(12)中, P 是对称矩阵,并且是半正定矩阵,为 Riccati 方程

$$A^T P + PA - PBB^T P + Q = 0 \tag{13}$$

的解.

根据定理 1 和式(12),可得

$$p_{ni} = k_i = \beta_{i-1}\omega_c^{n-i+1} - a_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{14}$$

式(14)中, p_{ni} 表示矩阵 P 的第 n 行第 i 列元素.

定理 2　对于单输入系统(4)来说,若取加权矩阵 R = 1,那么使闭环系统(7)的传递函数等于 ITAE 最优传递函数(1)的加权矩阵 Q 由下式确定[6]. 即

$$q_{ij} = \beta_{i-1}\beta_{j-1}\omega_c^{2n-i-j+2} - a_{i-1}a_{j-1} - p_{i(j-1)} - p_{j(i-1)}. \tag{15}$$

在式(15)中, $i = 1, 2, \cdots, n$; $j = 1, 2, \cdots, n$; q_{ij} 表示矩阵 Q 的第 i 行第 j 列元素,且规定 $p_{i0} = p_{j0} = 0$.

证明　将式(5), (14)代入式(13),可确定加权矩阵 Q. 式(15)得证.

由式(1)和表 1 可以看出, ITAE 最优传递函数只需选一个参数 ω_c. 根据定理 1 和式(14)可知,选定了参数 ω_c,状态反馈增益阵 K 就确定了,矩阵 P 第 n 行(或第 n 列)的 n 个元素也就确定了. 因此,矩阵 P 中有 $n(n-1)/2$ 个自由参数,式(15)中的加权矩阵 Q 也包含 $n(n-1)/2$ 个自由参数. 当取不同的自由

参数 $p_{ij}(i=1,2,\cdots,n-1;j=1,2,\cdots,n-1)$时,将对应有不同的加权矩阵 Q.但是,这些不同的加权矩阵 Q 将确定相同的状态反馈增益阵 K,从而保证了有相同的 ITAE 最优传递函数.

综上所述,可得下列选取加权矩阵 Q 的 4 个步骤.(1) 根据被控系统的可控标准形,确定 ITAE 最优传递函数的阶次 n.查表 1,可得到它的系数 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$,并初选参数 ω_c.(2) 根据定理 1,计算出 ITAE 最优控制的状态反馈增益阵 K.该矩阵的元素就是矩阵 P 第 n 行的 n 个元素 $p_{n1},p_{n2},\cdots,p_{nn}$.(3) 将 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1},\omega_c,p_{n1},p_{n2},\cdots,p_{nn}$ 代入定理 2 中的式(15),计算出加权矩阵 Q.(4) 上面求得的矩阵 P 和 Q 不一定是半正定矩阵.这时,还须适当选取参数 ω_c 和矩阵 P 中的自由参数 $p_{ij}(i=1,2,\cdots,n-1;j=1,2,\cdots,n-1)$,使 $P\geq 0$,$Q\geq 0$.

3 例子

给定三阶系统如式(4)所示,其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-8&-2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{16}$$

可以证明,该系统是可控的.取该系统的闭环传递函数为 $\omega_c=3\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$的三阶 ITAE 最优传递函数.那么,$\beta_0=1$,$\beta_1=2.15$,$\beta_2=1.75$,即

$$A_M=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-27&-19.35&-5.25\end{bmatrix}. \tag{17}$$

由定理 1 得状态反馈增益阵为

$$K=[26\quad 11.35\quad 3.25]. \tag{18}$$

由式(14)得 $p_{31}=26$,$p_{32}=11.35$,$p_{33}=3.25$,即

$$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&26\\p_{12}&p_{22}&11.35\\26&11.35&3.25\end{bmatrix}. \tag{19}$$

根据定理 2 中的式(15),有

$$\left.\begin{aligned}q_{11}&=\beta_0\omega_c^6-a_0^2=728,\\q_{12}&=\beta_0\beta_1\omega_c^5-a_0a_1-p_{11}=514.45-p_{11},\\q_{13}&=\beta_0\beta_2\omega_c^4-a_0a_2-p_{12}=139.75-p_{12},\\q_{22}&=\beta_1\omega_c^4-a_1^2-2p_{21}=310.4225-2p_{12},\\q_{23}&=\beta_1\beta_2\omega_c^3-a_1a_2-p_{22}-p_{31}=59.5875-p_{22},\\q_{33}&=\beta_2\omega_c^2-a_2^2-2p_{32}=0.8625.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

也即

$$Q=\begin{bmatrix}728&514.45-p_{11}&139.75-p_{12}\\514.45-p_{11}&310.4225-2p_{12}&59.5875-p_{22}\\139.75-p_{12}&59.5875-p_{22}&0.8625\end{bmatrix}. \tag{21}$$

在式(21)中,p_{11},p_{12},p_{22}为自由参数.若取 $p_{11}=514.45$,$p_{12}=139.75$,$p_{22}=59.5875$,则

$$P=\begin{bmatrix}514.4500&139.7500&26.0000\\139.7500&59.5875&11.3500\\26.0000&11.3500&3.2500\end{bmatrix}>0, \tag{22}$$

$$Q=\begin{bmatrix}728.0000&0&0\\0&30.9225&0\\0&0&0.8625\end{bmatrix}>0. \tag{23}$$

对应于所选择的加权矩阵 Q 和 R 该最优控制系统的单位阶跃响应曲线,如图 1 所示(图中 σ_p 表示幅

值). 从图中可以看出,该系统的平稳性和快速性都较好. 把式(16), (22), (23)代入方程(13)的左边,用 MATLAB 语言计算得到的结果为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.5684 & 0 \\ 0.5684 & 0.1421 & 0.0711 \\ 0 & 0.0711 & -0.0067 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

这说明式(22)中矩阵 P 是 Riccati 方程(13)的解,而后由式(12)不难验证此时的最优反馈增益阵为

$$K = [26.0000 \quad 11.3500 \quad 3.2500].$$

这就进一步说明了本文结论的正确性.

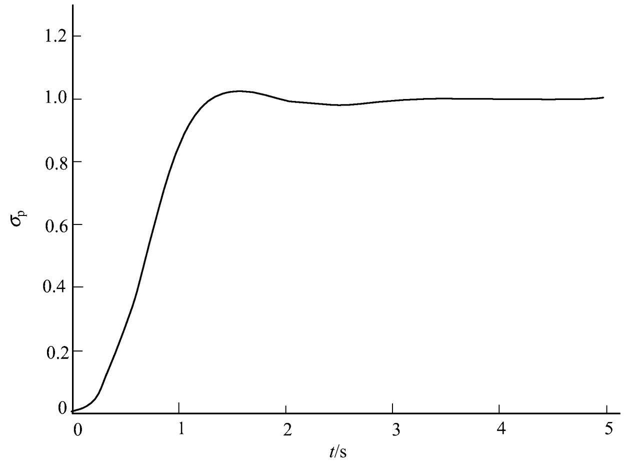

图 1　系统的单位阶跃响应曲线

4　结束语

本文给出计算加权矩阵 Q 的参数化公式,其优点是状态反馈增益阵按 ITAE 最优控制的方法确定. 它使闭环系统的传递函数等于 ITAE 最优传递函数,加权矩阵 Q 的选取只须进行简单的代数运算,避开了求解复杂的 Riccati 方程. 而且,由于 ITAE 最优传递函数含有可选参数 ω_0 和矩阵 P 含有自由参数 p_{ij} ($i = 1, 2, \cdots, n-1$; $j = 1, 2, \cdots, n-1$),使加权矩阵 Q 的选取具有很大的灵活性. 本研究揭开了 ITAE 最优传递函数与加权矩阵 Q, R 的相互关系,对认识 ITAE 最优控制的本质有重要的参考价值.

参　考　文　献

1　符　曦. 系统最优化及控制[M]. 北京:机械工业出版社,1998. 240～259
2　王永初. 系统的分散与集中决策(Ⅳ)——控制目标函数的实现[J]. 华侨大学学报(自然科学版),1995,16(2):179～185
3　龚德恩. 关于定常线性系统最优调节器的逆问题[J]. 华侨大学学报(自然科学版),1997,18(3):324～328
4　胡佑德,曾乐生,马东升. 伺服系统原理与设计[M]. 北京:北京理工大学出版社,1992. 223～254
5　项国波. ITAE 最佳控制[M]. 北京:机械工业出版社,1986. 213～287
6　冯冬青,谢宋和. 关于二次型最优极点配置的几个问题[J]. 郑州工学院学报,1995,16(2):57～63

Inverse Problem of ITAE Optimal Control

Li Zhongshen　Hong Jian　Wang Yongchu
(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract　By using the method of ITAE (integral of time absolute value of error) optimal control, the authors design the gain matrix K of state feedback; and give parametrized formula for calculating weighting matrix Q. Effectiveness and simplicity of this method for calculating weighting matrix Q is exemplified. The research results reveal the correlation between optimal transfer function of ITAE and weighting matrix Q or R, so as to recognize the essence of ITAE optimal control.

Keywords　ITAE, optimal control, gain matrix of state feedback, Riccati equation, weighting matrix