第26卷 第4期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 26 No. 4
2005年10月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Oct. 2005

文章编号 1000-5013(2005)04-0357-04

具状态依赖时滞微分方程的周期正解

韩 飞 王全义

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362011)

摘要 运用不动点定理, 研究一类具状态依赖时滞的微分方程周期正解的存在性. 得到一些正周期解存在的充分条件. 所得结论改进现有的结果.

关键词 锥不动点, 状态依赖时滞, 周期正解, 微分方程

中图分类号 O 175 文献标识码 A

文[1]研究了如下形式的具状态依赖时滞的非自治微分方程

$$y'(t) = -a(t)y(t) + f(t, y(t-\tau_1(t, y(t))), \cdots, y(t-\tau_m(t, y(t)))), \tag{1}$$

$$y'(t) = a(t)y(t) - f(t, y(t-\tau_1(t, y(t))), \cdots, y(t-\tau_m(t, y(t)))) \tag{2}$$

周期正解的存在性. 如文[1, 2]中所述, 目前关于具状态依赖时滞微分方程周期正解存在性的结果尚不多见. 本文研究方程(1), (2), 所得结果改进了文[1, 3]中的结果. 其中 $a(t) \in C(\mathbf{R}, [0, +\infty))$, 且 $a(t)$ 不恒为 0, $a(t+\omega) = a(t)$, $\tau_i(t, u) \in C(\mathbf{R}\times[0, +\infty), \mathbf{R})$, $\tau_i(t+\omega, u) = \tau_i(t, u)$, $(t, u) \in \mathbf{R}\times[0, +\infty)$, $\omega > 0$, $f(t, u_1, \cdots, u_m) \in C(\mathbf{R}\times[0, +\infty)^m, [0, +\infty))$, $f(t+\omega, u_1, \cdots, u_m) = f(t, u_1, \cdots, u_m)$, $t \in \mathbf{R}$, $u_i \in [0, +\infty)$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 方程(1), (2)包含了许多种群动力学模型, 如(1) 具状态依赖的单种群 Logistic 模型[2]为

$$y'(t) = y(t)[a(t) - \sum_{i=1}^{n} b_i(t) y(t-\tau_i(t, y(t)))],$$

(2) 具有时滞依赖的红细胞再生模型[4]为

$$y(t) = -a(t)y(t) + \frac{a(t)}{1 + y^n(t-\tau(t, y(t)))},$$

等等.

1 预备知识及引理

先给出锥的定义. 设 X 是 Banach 空间, $K \subseteq X$ 非空, 且满足: (1) 对任意 $u, v \geqslant 0$, 任意 $x, y \in K$, 有 $ux + vy \in K$; (2) 若 $x \in K$, $-x \in K$, 则 $x = 0$. 那么, 称 K 为 X 中的一个锥.

引理 1[5] 设 X 是 Banach 空间, K 是 X 中的一个锥, 并设 r 和 R 是满足 $0 < r < R$ 的常数. 假设算子 $T: \Omega_R \cap K \to K$ 是全连续算子, 并且如果下面条件

$$\left.\begin{array}{lll} \forall \lambda \in [0, 1], & \forall x \in K \cap \partial\Omega_r \Rightarrow x \neq \lambda T x, & \\ \exists \Psi \in K \setminus \{0\}, & \forall x \in K \cap \partial\Omega_R, & \forall \delta \geqslant 0 \Rightarrow x \neq Tx + \delta\Psi, \end{array}\right\} \tag{A}$$

或

$$\left.\begin{array}{lll} \forall \lambda \in [0, 1], & \forall x \in K \cap \partial\Omega_R \Rightarrow x \neq \lambda T x, & \\ \exists \Psi \in K \setminus \{0\}, & \forall x \in K \cap \partial\Omega_r, & \forall \delta \geqslant 0 \Rightarrow x \neq Tx + \delta\Psi \end{array}\right\} \tag{B}$$

收稿日期 2005-01-28

作者简介 韩 飞(1977-), 男, 硕士研究生, 主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究. E-mail: hwl@hqu.edu.cn

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(01QZR02)

成立. 那么, T 在 $K\cap\{x\in X: r<\|x\|<R\}$ 中有一个不动点. 令 $X=\{y(t)\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})\mid y(t+\omega)=y(t), t\in\mathbf{R}\}$, 取 $\|y\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}|y(t)|$, 则在此范数下易知 X 是 Banach 空间.

下面只证明方程(1)的情况, 方程(2)可类似证得.

引理 2 求解方程(1)的 ω 周期解等价于求解积分方程(3)的 ω 周期解. 有

$$y(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)f(s,y(s-\tau_1(s,y(s))),\cdots,y(s-\tau_m(s,y(s))))\,\mathrm{d}s, \tag{3}$$

其中 $G(t,s)=\dfrac{\exp(\int_t^s a(l)\,\mathrm{d}l)}{\exp(\int_0^\omega a(l)\,\mathrm{d}l)-1}$.

证明 设 $y(t)$ 是方程(1)的 ω 周期解, 在方程(1)两端同时乘以 $\exp(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s)$. 整理并从 t 到 $t+\omega$ 积分, 可得

$$y(t+\omega)\exp(\int_0^{t+\omega}a(s)\,\mathrm{d}s)-y(t)\exp(\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s)=$$

$$\int_t^{t+\omega}\exp(\int_0^s a(l)\,\mathrm{d}l)f(s,y(s-\tau_1(s,y(s))),\cdots,y(s-\tau_m(s,y(s))))\,\mathrm{d}s.$$

所以, $y(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)f(s,y(s-\tau_1(s,y(s))),\cdots,y(s-\tau_m(s,y(s))))\,\mathrm{d}s$, 即 $y(t)$ 也是方程(3)的解. 反之, 若 $y(t)$ 是方程(3)的 ω 周期正解, 则对方程(3)两端关于 t 求导得到方程(1).

定义 X 上的算子 $T: Ty(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)f(s,y(s-\tau_1(s,y(s))),\cdots,y(s-\tau_m(s,y(s))))\,\mathrm{d}s$, 容易证明 $(Ty)(t+\omega)=(Ty)(t), t\in\mathbf{R}$. 所以 $T: X\to X$.

由引理2可知, 求解方程(1)的周期解等价于求解积分方程 $y(t)=Ty(t)$ 的周期解, 即求解算子 T 在 X 上的不动点.

引理 3 算子 T 是全连续算子.

证明 该证明过程与文[1]中相同, 略.

定义 $K=\{y\mid y\in X, y(t)\geqslant 0, y(t)\geqslant\sigma\|y\|\}$, $\sigma=\exp(-\int_0^\omega a(s)\,\mathrm{d}s)$.

引理 4 K 是 X 中的锥.

证明 对于任意 $u,v\geqslant 0$, 任意 $x,y\in K$, 有 $x(t)\geqslant 0, y(t)\geqslant 0, x(t)\geqslant\sigma\|x\|, y(t)\geqslant\sigma\|y\|$, 所以 $ux(t)+vy(t)\geqslant 0$, $ux+vy\geqslant u\sigma\|x\|+v\sigma\|y\|\geqslant\sigma\|ux+vy\|$. 又若 $y(t)\in K, -y(t)\in K$, 由 K 的定义可知 $y(t)=0$. 所以 K 是 X 中的锥.

引理 5 算子 T 在 K 上的像仍在 K 中, 即 $TK\subseteq K$.

证明 对于任意 $s\in[t,t+\omega]$, 其中 $t\in[0,\omega]$, 有

$$\alpha\triangleq G(t,t)\leqslant G(t,s)\leqslant G(t,t+\omega)\triangleq\beta,$$

则 $\sigma=\dfrac{\alpha}{\beta}\leqslant\dfrac{G(t,s)}{G(t,t+\omega)}\leqslant 1$. 对于任意 $y\in K$, 有

$$\|Ty\|\leqslant\beta\int_0^\omega f(t,u)\,\mathrm{d}t,$$

同时有

$$(Ty)(t)\geqslant\alpha\int_0^\omega f(t,u)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{\alpha}{\beta}\|Ty\|=\sigma\|Ty\|\geqslant 0.$$

所以, $Ty(t)\in K$, 故 $TK\subseteq K$.

2 主要定理及证明

定理 1 假设条件

$$\lim_{|u|\to 0}\inf_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}>a(t),\qquad \lim_{|u|\to+\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}<a(t), \tag{B1}$$

或

$$\lim_{|u|\to 0}\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}<a(t),\qquad \lim_{|u|\to+\infty}\inf_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}>a(t) \tag{B2}$$

成立. 那么, 则方程(1), (2)存在周期解, 其中$|u|=\max\{|u_1|,\cdots,|u_m|\}$.

证明　假设条件(B1)成立.

由 $\lim\limits_{|u|\to 0}\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\dfrac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}>a(t)$, 可以找到 $\varepsilon>0$ 和 $0<r$, 使得当 $0\leqslant|u|<r$, $t\in\mathbf{R}$ 时有

$$f(t,u_1,\cdots,u_m)>a(t)(1+\varepsilon)|u|.$$

取 $\Psi\equiv 1$. 下面证明对于任意 $y\in K\cap\partial\Omega$ 和 $\delta\geqslant 0$, 有 $y\neq Ty+\delta\Psi$; 否则, 存在 $y_0\in K\cap\partial\Omega_r$ 和 $\delta_0\geqslant 0$, 使得 $y_0=Ty_0+\delta_0$. 取 $\eta=\min\limits_{t\in\mathbf{R}}y_0(t)$, 则对于 $\forall t\in\mathbf{R}$, 有

$$y_0(t)=(Ty_0)(t)+\delta_0=$$
$$\int_t^{t+\omega}G(t,s)f(s,y_0(s-\tau_1(s,y_0(s))),\cdots,x_0(s-\tau_m(s,y_0(s))))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s)(1+\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|y_0(s-\tau_i(s,y_0(s)))|\,\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\eta(1+\varepsilon)\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s)\mathrm{d}s=\eta(1+\varepsilon).$$

因此, 可得 $\eta\geqslant(1+\varepsilon)\eta$, 矛盾. 所以对于任意 $y\in K\cap\partial\Omega_r$ 和 $\delta\geqslant 0$, 有

$$y\neq Ty+\delta\Psi. \tag{4}$$

由于 $\lim\limits_{|u|\to+\infty}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\dfrac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}<a(t)$, 则存在 $r_1>r$, 使得当 $|u|>r_1$, $t\in\mathbf{R}$ 时, 有

$$f(t,u_1,\cdots,u_m)<a(t)|u|.$$

取 $r_2>\dfrac{r_1}{\delta}$, 证明对于任意 $y\in K\cap\partial\Omega_r$ 和 $\lambda\in[0,1]$, 有

$$y\neq\lambda Ty. \tag{5}$$

否则, 存在 $y_0\in K\cap\partial\Omega_2$, $\lambda_0\in 0,1]$, 满足

$$y_0=\lambda_0 Ty_0.$$

显然, $\lambda_0\neq 0$. 因为 $\|y_0(t)\|=r_2$, 并且对任意 $t\in\mathbf{R}$, 有

$$r_1<\sigma r_2\leqslant y_0(t-\tau_i(t,y_0(t)))\leqslant r_2,\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

由此可得

$$f(t,y_0(t-\tau_1(t,y_0(t))),\cdots,y_0(t-\tau_m(t,y_0(t))))<$$
$$a(t)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|y_0(t-\tau_i(t,y_0(t)))|,\qquad t\in\mathbf{R}.$$

因此可得

$$y_0(t)=\lambda_0\int_t^{t+\omega}G(t,s)f(s,y_0(s-\tau_1(s,y_0(s))),\cdots,y_0(s-\tau_m(s,y_m(s))))\mathrm{d}s<$$
$$\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|y_0(s-\tau_i(s,y_0(s)))|\,\mathrm{d}s\leqslant r_2\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s)\mathrm{d}s=r_2.$$

所以可得 $\|y_0\|=r_2<r_2$, 矛盾.

由式(4), (5)并根据引理 1, 可得 T 有一不动点 $y\in K\cap\{y(t)\in X\,|\,r<\|y\|<r_2\}$. 由引理 2 和引理 3, 可得 y 是方程(1)的正 ω 周期解.

同理可以证明当条件(B2)成立时的情况.

注 1　定理 1 的条件比文[1]的定理条件要求较弱.

注 2　文[4]对方程(1), (2)当 $\tau_i(t,y(t))=\tau_i(t)$, $i=1,2,\cdots,m$ 时, 即时滞不是状态依赖型的类型进行了讨论. 故文[4]的定理 2.1 是定理 1 的特殊情况, 并且本文定理 1 所要求的条件较文[4]的定理条件要求宽松.

推论 1　假设下面条件之一成立. 即

$$\lim_{|u|\to 0}\inf_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}=0,\qquad \lim_{|u|\to+\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}=+\infty, \tag{6}$$

或

$$\lim_{|u|\to 0}\inf_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}=+\infty,\qquad \lim_{|u|\to+\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u_1,\cdots,u_m)}{|u|}=0. \tag{7}$$

那么,方程(1)存在周期解.

证明 由本推论的条件可以推出定理 2 的条件,由定理 1 可知推论成立.

推论 2 考虑方程

$$y'(t)=y(t)[a(t)-\sum_{i=1}^{m}f_i(t,x(t-\tau_i(t)))],$$

在式(1)中,$a(t)\in C(\mathbf{R},(0,+\infty))$, $a(t+\omega)=a(t)$, $f_i(t,y)\in C(\mathbf{R}\times[0,+\infty),[0,+\infty))$, $\tau_i\in C(\mathbf{R},[0,+\infty))$, $\tau_i(t+\omega)=\tau_i(t)$, $f_i(t+\omega,y)=f_i(t,y)$, $i=1,2,\cdots,m$, $\omega>0$ 是常数.

若下面条件之一成立.即

$$\lim_{|u|\to 0}\sup_{t\in[0,\omega]}f_i(t,u)=0,\qquad \lim_{|u|\to+\infty}\inf_{t\in[0,\omega]}f_i(t,u)=+\infty,\qquad i=1,2,\cdots,m, \tag{8}$$

或

$$\lim_{|u|\to 0}\inf_{t\in[0,\omega]}f_i(t,u)=+\infty,\qquad \lim_{|u|\to+\infty}\sup_{t\in[0,\omega]}f_i(t,u)=0,\qquad i=1,2,\cdots,m. \tag{9}$$

那么,方程至少存在一个正 ω 周期解.

证明 由本推论的条件可以推出推论 1 的条件,由推论 1 可证明得.

注 3 本推论即是文〔6〕的定理 1.

3 例子

考虑方程

$$y'(t)=y(t)\left[\frac{\cos(t)+8}{2}-(2+\sin(t))(y^{1/2}(t-\sin(t-y(t)))+y(t-\sin(t-y(t))))\right]$$

所以

$$a(t)=\frac{\cos(t)+8}{2},\qquad f(t,u_1,u_2)=\frac{(2+\sin(t))}{2}(u^{1/2}+u),\qquad \omega=2\pi.$$

于是,$\lim\limits_{|u|\to 0}\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u)}{|u|}=+\infty>a(t)$, $\lim\limits_{|u|\to+\infty}\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\frac{f(t,u)}{|u|}=2<a(t)$. 因此,由定理 1 可得此方程至少有一个正周期解.但是,由文〔1〕的定理不能判定.

参 考 文 献

1 刘文祥. 具状态依赖时滞的微分方程的周期正解[J]. 高校应用数学学报, 2002, 17A(1): 22~28

2 Kuang Yang, Smith H L. Slowly oscillating periodic solutions of autonomous state-depend delay equation[J]. Nonlinear Analysis, 1992, 19(9): 855~872

3 蒋达清, 魏俊杰. 非自治时滞微分方程周期正解的存在性[J]. 数学年刊, 1999, 20A(6): 715~720

4 Mackey M, Glass L. Oscillations and chaos in physiological control system[J]. Science, 1977, 197: 287~289

5 Jiang Daqing, Regan D O, Agrwal R P. Optimal existence theory for single and multiple positive periodic solutions of functional differential equations[J]. Nonlinear Oscillations, 2003, 6(3): 327~338

6 Liao Xinyuan. Existence of positive solutions for general delayed nonautonomous differential equation[J]. Pure and Applied Mathematics, 2002, 19(3): 265~272

Existence of Positive Pesitive Periodic Solutions to a Class of Differential Equations with State-Dependent Delay

Han Fei Wang Quanyi

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract By applying a fixed point theorem, the authors study the existence of positive periodic solutions to a class of differential equations with stated-dependent delay. Some sufficient conditions for the existence of positive periodic solutions are obtained. The authors′ results improve the results in literatures now available.

Keywords state-dependent delay, positive periodic solution, fixed point theorem, differential equation