第 26 卷 第 4 期
2005 年 10 月
华侨大学学报(自然科学版)
Journal of Huaqiao University (Natural Science)
Vol. 26 No. 4
Oct. 2005

文章编号 1000-5013(2005)04-0349-04

一类 Cauchy 问题解的唯一性及其应用

潘 坚

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 利用极值原理和 Schauder 理论, 构造恰当的辅助函数. 证明基于 Vasicek 模型下, 市场利率衍生物满足的定解问题的解的存在性和唯一性. 最后, 阐述其结果在金融数学中的应用.

关键词 Vasicek 模型, Cauchy 问题, 极值原理, 唯一性

中图分类号 O 241.82; F 830.9 文献标识码 A

利率是金融市场上最重要的价格变量之一, 它直接决定相关金融产品的定价和利率风险的管理. 许多学者提出以模型刻画利率的随机行为, 其中 Vasicek 模型的影响力和应用范围在衍生物定价中是最为广泛的. 它的一个重要特征是利率具有均值回复特性. 即随着时间的推移, 利率呈现出向某个长期平均收敛的趋势. 另外, Vasicek 模型可以显式表示市场风险价格及其衍生物的价格, 有很简单的分析表达式[1]. 它为衍生工具的定价和利率风险的管理提供了方便. 因此, 研究 Vasicek 模型很有必要. 目前国内外对该模型的研究还比较少, 且主要集中在实际应用中, 并未进行深入的理论研究. Vasicek 在 1977 年利用概率论的方法, 只是获得了在到期日支付 1 美元的零息票债券价格的解析表达式[2]. 本文利用偏微分方程(PDE) 方法证明基于 Vasicek 模型下, 市场利率衍生物满足定解问题的解的存在性和唯一性.

1 利率衍生物的定价模型

设利率 r 满足方程

$$\mathrm{d}r_t = \alpha(b - r_t)l\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}w_t, \qquad \alpha > 0. \tag{1}$$

在式(1)中, 参数 α 是均值回复速度, b 是短期利率的长期平均值, σ 是短期利率的瞬时波动率, w_t 是标准的 Wiener 过程. 利用 Δ 对冲技巧和无套利原理, 可得到利率衍生物满足的偏微分方程是系数无界的线性抛物型方程[3]. 记 $\overline{P}(r, \tau)$ 为利率衍生物的价格, 则有

$$\frac{\partial \overline{P}}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \overline{P}}{\partial r^2} + \alpha(b - r)\frac{\partial \overline{P}}{\partial r} - r\overline{P} = 0. \tag{2}$$

为确定方程(2) 的一个解, 需要给出终值条件. 利率衍生物在到期日的价值等于它的收益, 即

$$\overline{P}(r, T) = \Phi(r). \tag{3}$$

因此, 到期日 T 的利率衍生物满足终值问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{P}}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \overline{P}}{\partial r^2} + \alpha(b - r)\frac{\partial \overline{P}}{\partial r} - r\overline{P} = 0, \qquad -\infty < r < +\infty, \quad 0 < \tau \leqslant T, \\ &\overline{P}(r, T) = \Phi(r), \qquad -\infty < r < +\infty \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

作自变量代换 $t = T - \tau$, 问题(4) 则转化为线性变系数抛物型方程的 Cauchy 问题, 有

$$\left.\begin{aligned} &LP = \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \alpha(r - b)\frac{\partial P}{\partial r} + rP = 0, \qquad -\infty < r < +\infty, \quad 0 < \tau \leqslant T, \\ &P(r, 0) = \Phi(r), \qquad -\infty < r < +\infty. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

收稿日期 2005-03-09
作者简介 潘 坚(1979-), 男, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程金融数学的研究. 现为赣南师范学院数学与计算机系(江西 赣州 341000) 助教, E-mail: pan791103@126.com
基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(03QZR9)

2 解的唯一性的证明

引理 1[4] 即极值原理. 若函数 $u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$, 且满足不等式

$$|u(x,t)|\leqslant M\exp[\alpha|x|^{2-\theta}],$$

在上式中, M, α, θ 都为正常数. 在 Q_T 内满足线性抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,t)u=f(x,t).$$

其中, 区域 $Q_T=(a,b)\times(0,T]$, $a(x,t)\geqslant\lambda>0$, $c(x,t)\geqslant 0$. 当 $f(x,t)\leqslant 0$ 时, $u(x,t)$ 的非负最大值只能在抛物边界 $\partial_P Q_T$ 上取到.

定理 1 若 Cauchy 问题(5)的解 $P(r,t)\in C^{2,1}(H_T)\cap C(\widetilde{H}_T)$, 且满足增长条件. 即存在常数 $M>0$ 和 $N>0$, 使得 $|P(r,t)|\leqslant M\exp[Nr^2]$. 其中区域 $H_T=(-\infty,+\infty)\times(0,T]$, 则这类解必唯一.

证明 假设 $P_1(r,t)$, $P_2(r,t)$ 是 Cauchy 问题的两个解, 并令 $P(r,t)=P_1(r,t)-P_2(r,t)$, 则 $P(r,t)$ 满足问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\alpha(r-b)\frac{\partial P}{\partial r}+rP=0, \qquad -\infty<r<+\infty,\ 0<t\leqslant T,\\ &P(r,0)=0, \qquad -\infty<r<+\infty,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

且存在某一个 $N_0>0$, 使

$$|P(r,t)|\leqslant N_0\exp[Nr^2]. \tag{7}$$

为证明 $P(r,0)\equiv 0$, 可引进辅助函数

$$H(r,t)=\exp[\frac{kr^2}{1-\mu t}+\beta t], \qquad 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2\mu}, \tag{8}$$

其中 k, μ, β 都为待定的正常数. 为此, 作简单的计算并利用带 ε 的 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{LH}{H}&=r+\beta+\frac{k\mu r^2}{(1-\mu t)^2}+\frac{2\alpha kr^2}{1-\mu t}-\frac{2\alpha bkr}{1-\mu t}-\frac{k\sigma^2}{1-\mu t}-\frac{2k^2\sigma^2r^2}{(1-\mu t)^2}\geqslant\\ &-\frac{r^2}{\varepsilon}-c(\varepsilon)+\beta+\frac{k\mu r^2}{(1-\mu t)^2}+\frac{2\alpha kr^2}{1-\mu t}-\alpha^2b^2-\frac{k^2r^2}{(1-\mu t)^2}-\frac{k\sigma^2}{1-\mu t}-\frac{2k^2\sigma^2r^2}{(1-\mu t)^2}.\end{aligned} \tag{9}$$

为保证 $LH/H\geqslant 0$, 可取充分大的 β, 可得

$$\beta-\alpha^2b^2-\frac{k\sigma^2}{1-\mu t}-c(\varepsilon)\geqslant 0, \tag{10}$$

再取充分大的 μ, 则可得

$$\frac{1}{\varepsilon}+\frac{k\mu}{(1-\mu t)^2}+\frac{2\alpha k}{1-\mu t}-\frac{k^2}{(1-\mu t)^2}-\frac{2k^2\sigma^2}{(1-\mu t)^2}\geqslant 0. \tag{11}$$

注意到 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2\mu}$, 式(10), (11)可简化为

$$\left.\begin{aligned}&\beta\geqslant\alpha^2b^2+2k\sigma^2+c(\varepsilon),\\ &\mu\geqslant-\alpha+2k\sigma^2+k+\frac{1}{\varepsilon k}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

因此, $LH/H\geqslant 0$. 下面考虑函数

$$V(r,t):P(r,t)=H(r,t)V(r,t),$$

其中 $H(r,t)$ 由式(8)定义. 经过简单的计算后, $V(r,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+[\alpha(r-b)-\frac{\sigma^2}{H}\frac{\partial H}{\partial r}]\frac{\partial V}{\partial r}+V\frac{LH}{H}=0. \tag{13}$$

由变换 $P(r,t)=H(r,t)V(r,t)$ 和式(7)知, $V(r,t)$ 在区域 $D_1=(-R,+R)\times(0,\frac{1}{2\mu}]$ 的抛物边界 $|r|=R$ 上有估计为

$$|V(r,t)|\leqslant N_0\exp[Nr^2-\frac{kr^2}{1-\mu t}-\beta t]\leqslant N_0\exp[Nr^2-kr^2]. \tag{14}$$

而在 D_1 的底面 $t=0$ 上, $P(r,0)=0$, 则 $V(r,0)=0$. 于是由式 $LH/H\geqslant 0$ 和极值原理, 断定在区域 $D_2=$

$(-R,+R)\times[0,\frac{1}{2\mu}]$ 中有

$$|V(r,t)|\leqslant c\exp[Nr^2-kr^2].$$

则当 $R\to+\infty, k>N$ 时, 可得到在区域 $H_{T_1}=(-\infty,+\infty)\times[0,\frac{1}{2\mu}]$ 中 $V(r,t)\equiv 0$. 用同样的方法, 可以继续证明在 $\frac{1}{2\mu}\leqslant t\leqslant\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\mu}\leqslant t\leqslant\frac{3}{2\mu}$ 等带形区域中 $V(r,t)\equiv 0$, 对 $P(r,t)$ 有同样的结论. 因此, 定解问题的解是唯一的.

3　解的存在性的证明

定理 **2**　若 $\Phi(r)$ 连续且存在 $M_0>0$ 和 $h>0$, 使 $|\Phi(r)|\leqslant M_0e^{hr^2}$, 则 Cauchy 问题(5) 在区域 $H_T=(-\infty,+\infty)\times(0,T]$ 中存在解 $P(r,t)\in C^{2,1}(H_R)\cap C(\widetilde{H}_T)$.

证明　记 $B_N=\{r\,|\,|r|<N\}$, $Q_T^N=B_N\times(0,T]$, $S_T^N=\partial B_N\times(0,T]$. 考虑第一边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2P}{\partial r^2}+\alpha(r-b)\frac{\partial P}{\partial r}+rP=0, && (r,t)\in Q_T^N,\\ &P(r,t)=\Phi(r), && (r,t)\in S_T^N,\\ &P(r,0)=\Phi(r), && r\in B_N.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

由定理 5[5], 边值问题在区域 Q_T^N 中存在解, 为

$$P_N(r,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T^N),\qquad 0<\alpha<1.$$

为证明 $P_N(r,t)$ 在区域 Q_T^N 中有界, 可变换为

$$P_N(r,t)=\exp[\frac{kr^2}{1-\mu t}+\beta t]V_N(r,t),\qquad 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2\mu}.\tag{16}$$

上式中, β, k, μ 为待定的正常数, 并记

$$H(r,t)=\exp[\frac{kr^2}{1-\mu t}+\beta t],$$

$$T_1=\frac{1}{2\mu}.$$

则在区域 $Q_{T_1}^N=B_N\times(0,T_1)$ 中有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial V_N}{\partial t}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2V_N}{\partial r^2}+[\alpha(r-b)-\frac{2kr\sigma^2}{1-\mu t}]\frac{\partial V_N}{\partial r}+\frac{LH}{H}V_N=0, && (r,t)\in Q_{T_1}^N,\\ &V_N(r,t)=\Phi(r)\exp[-\frac{kr^2}{1-\mu t}-\beta t], && (r,t)\in S_{T_1}^N,\\ &V_N(r,0)=\Phi(r)\exp(-kr^2), && r\in B_N.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

为保证 $LH/H\geqslant 0$, 可取 μ, β, ε 充分大和恰当的 k, 使之有

$$\beta\geqslant c(\varepsilon)+2k\sigma^2+a^2b^2,$$

$$\mu\geqslant 2k\sigma^2+k+\frac{1}{\varepsilon k}.$$

利用极值原理, $V_N(r,t)$ 在区域 $Q_{T_1}^N=(-N,+N)\times(0,\frac{1}{2\mu}]$ 中不能取到正的最大值, 而在区域的抛物边界上有估计. 即

$$|V_N(r,0)|=|\Phi(r)\exp(-kr^2)|\leqslant M_0e^{hN^2},$$

$$|V_N(r,0)|_{S_{T_1}^N}|=|\Phi(r)|_{S_{T_1}^N}\exp[-\frac{kr^2}{1-\mu t}-\beta t]|\leqslant M_0e^{hN^2}.$$

在区域 $Q_{T_1}^N$ 中, $N_N(r,t)\leqslant M_0e^{hN^2}$. 即

$$P_N(r,t)\leqslant M_0\exp[hN^2+\frac{kr^2}{1-\mu t}+\beta t].$$

因此, $P_N(r,t)$ 对 $\forall k>0$ 一致有界. 即令 $k\to 0$, 则

$$P_N(r,t) \leqslant M_0 \exp[hN^2 + \beta t]. \tag{18}$$

用同样的方法,经过有限步后(后一次的步长都比前一次的步长小)可以证明 $P_N(r,t)$ 在 H_T 中 $\forall k>0$ 一致有界. 对任意的 $Q_T^m = B_m \times (0,T] \subset Q_T^N = B_N \times (0,T] \subset H_T$, $\forall m < N$. 当 N 充分大时,由 Schauder 内估计,有

$$|P_N(r,t)|_{2+\alpha, Q_T^m} \leqslant c(m), \qquad \forall m < N. \tag{19}$$

在式(19)中,$c(m)$ 与 N 无关. 由 Ascoli-Arzela 定理可知,$\{P_N(r,t)\}$ 在 Q_T^m 中存在收敛的子序列. 应用通常的对角线序列法,可取 $\{P_N(r,t)\}$ 的子序列 $\{P_N^i(r,t)\}$ 与函数 $P(r,t) \in c^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(H_T)$,使得对任意的 $Q_T^m \subset Q_T^N \subset H_T$. 当 $i \to \infty$ 时,$P_N^i(r,t)$, $\frac{\partial P_N^i(r,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial P_N^i(r,t)}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 P_N^i(r,t)}{\partial r^2}$ 在 H_T 中分别收敛于 $P(r,t)$, $\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial r^2}$. 因此,极限函数 $P(r,t) \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(H_T)$,式(15)按上述子序列取极限,满足方程(5). $c(m)$ 与 m 有关. 又由式(18),(19)可知,在任意的有界区域 Q_T 中 $P(r,t) \in C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$,并且对于 $(r,t) \in Q_T$,有

$$|P(r,t)| \leqslant M e^{2r^2}. \tag{20}$$

在式(20)中,M 为仅依赖于 M_0, T 的常数. $P(r,t)$ 显然满足方程和初值条件,即 $P(r,t)$ 为 Cauchy 问题(5)的解.

4 结束语

本文的研究结果表明,基于 Vasicek 模型下的任何利率衍生产品,在市场风险中性过程中只存在一个公平价格,即仿射结构解. 另外,本文在理论研究上也是很有意义的. 一方面,丰富了此类定解问题的适定性的研究;另一方面,为债券市场中利率衍生物的定价提供了理论上的保证.

参 考 文 献

1 Hull J. Options futures and other derivatives[M]. 4th ed. New York: Prentice-Hall, 2000. 564~599

2 Vasicek O A. An equilibrium characterization of the term structure[J]. Journal of Financial Economics, 1977, (5): 177~188

3 Willmott P. Derivatives: The theory and practice of financial engineering[M]. West Sussex: John Wiley & Sons, 1998. 447~462

4 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. 140~141

5 Friedman A. 抛物型偏微分方程[M]. 夏宗伟译. 北京: 科学出版社, 1984. 77

Uniqueness and Application of the Solutions to a Class of Cauchy Problems

Pan Jian

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract By means of maximum principle, Schauder theorem and by constructing appropriate auxilliary function, the author proves the existence and uniqueness of the solutions to a terminal question in which the derivatives of Vasicek model-based market rate of interest satisfy; and sets forth the application of its results to financial mathematics.

Keywords Vasicek model, Cauchy problem, maximum principle, uniqueness