

文章编号 1000-5013(2005)04-0346-03

二阶微分方程的可积性判据

伍锦棠 徐卫忠

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 研究二阶微分方程的可积性,通过引进起中介传媒作用的函数 $f(x)$, $\varphi(x)$ 等,经函数变换,有效地将二阶线性微分方程降至一阶求解.文中还找到该类方程可积的若干个充分判据,给出用中介函数 $f(x)$, $\varphi(x)$ 等表示的二阶微分方程通解的积分表达式.

关键词 二阶微分方程, 特解, 通解, 充分条件, 可积判据, 降阶

中图分类号 O 241.8

文献标识码 A

众所周知,在微分方程的可积性研究中,寻求二阶微分方程的初等解至今尚无有效的方法.它的进展基本上只停留在可经自变量变换化为二阶常系数微分方程,或者是降为一阶线性方程上,这严重影响了微分方程在现代控制论、向量场分支理论等学科中的应用.同时,由于工程技术中也希望尽可能地出现精确解,因此对微分方程的精确解的研究有积极的意义.本文用不同于前人的方法^[1~4]研究二阶线性微分方程^[5]

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

在式(1)中, p, q 都是 x 的可微函数.通过一些巧妙的函数变换,有效地将此微分方程降至一阶求解,得出可积的充分条件,并给出了可积性判据定理.

1 主要结果

为方便起见,如无特别声明,本文出现过的 p, q, f, φ 都是 x 的可微函数,即为 $p(x), q(x), f(x), \varphi(x)$. 现将本文主要结果介绍如下.

定理 1 若函数 p, q, f 满足 $q = f' - f^2 + pf$, 其中 f 是任一可微函数,则二阶线性微分方程(1)可积,且其通解为

$$y = e^{-\int f dx} \{ c \int e^{\int (2f - p) dx} dx + \bar{c} \}.$$

定理 2 若函数 p, q, f, φ 满足 $q = \phi - \varphi^2 + (p - 2f)\varphi + f' - f^2 + pf$, 其中 f, φ 都是任意可微函数,则二阶线性微分方程(1)可积,且其通解为

$$y = e^{-\int (f + \varphi) dx} \{ c \int e^{\int (2f + 2\varphi - p) dx} dx + \bar{c} \}.$$

定理 3 若函数 p, q, f, φ 满足 $q = \phi - \varphi^2 + p\varphi$, 其中 φ 是任一可微函数,则二阶非线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(y' + \varphi y)^n$ 可积,且其通解为

$$y = \begin{cases} e^{-\int \varphi dx} \{ c \int e^{\int (2\varphi - p) dx} dx + \bar{c} \} \dots, & n = 1, \\ e^{-\int \varphi dx} \{ \int e^{\int (2\varphi - p) dx} [(1 - n) \int f e^{(n-1)\int (\varphi - p) dx} dx + c]^{\frac{1}{1-n}} dx + \bar{c} \} \dots, & n \neq 1. \end{cases}$$

收稿日期 2005-01-14

作者简介 伍锦棠(1977),男,助教,硕士,主要从事微分方程理论的研究. E-mail: wjt200@163.net

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(03QZR09)

2 定理的证明

2.1 定理1的证明

令 $z = y' + f y$, 则有

$$y' = z - f y, \quad y'' = z' - f' y - f y'.$$

将 y', y'' 代入方程(1)后整理, 得

$$y'' + p y' + q y = z' + (p - f) z = 0.$$

此为关于 z 的一阶线性微分方程, 解得 $z = c e^{\int (f-p) dx}$, 故 $y' + f y = c e^{\int (f-p) dx}$. 这是关于 y 的一阶线性微分方程, 用常数变易法可解得 $y = e^{-\int f dx} \{ c \int e^{\int (2f-p) dx} dx + \bar{c} \}$, 即定理1结论成立.

2.2 定理2的证明

令 $y = e^{-\int f dx} u$, 则有

$$y' = e^{-\int f dx} u' - f e^{-\int f dx} u,$$

$$y'' = -f' e^{-\int f dx} u + f^2 u e^{-\int f dx} - 2f u' e^{-\int f dx} + u'' e^{-\int f dx}.$$

将 y, y', y'' 代入方程(1)后整理, 得

$$u'' + (p - 2f) u' + (q + f^2 - f' - pf) u = 0.$$

又已知 $q = \phi - \phi^2 + (p - 2f) \phi + f' - f^2 + pf$, 故 $u'' + (p - 2f) u' + (q + f^2 - f' - pf) u = (u' + \phi u)' + (p - 2f - \phi)(u' + \phi u) = 0$. 解得 $u' + \phi u = c e^{\int (2f + \phi - p) dx}$. 这是关于 u 的一阶线性非齐次微分方程, 用常数变易法可解得

$$u = e^{-\int f dx} \{ c \int e^{\int (2f + 2\phi - p) dx} dx + \bar{c} \}.$$

所以, 二阶线性微分方程(1)的通解为

$$y = e^{-\int f dx} u = e^{-\int (f + \phi) dx} \{ c \int e^{\int (2f + 2\phi - p) dx} dx + \bar{c} \}.$$

定理2结论成立.

2.3 定理3的证明

令 $z = y' + \phi y$, 则有 $y' = z - \phi y$, $y'' = z' - \phi' y - \phi y'$. 将 y', y'' 代入方程(2)后整理, 得

$$y'' + p y' + q y = z' + (p - \phi) z = f z^n.$$

两端同时除以 z^n , 得

$$\frac{z'}{z^n} = (\phi - p) z^{1-n} + f.$$

当 $n \neq 0, 1$ 时, 此为 Bernoulli 方程. 即(i) 当 $n = 1$ 时, $z' = f z + (\phi - p) z = (\phi + f - p) z$, 解得 $z = c e^{\int (\phi + f - p) dx}$ 且 $z = y' + \phi y$. 所以, 有

$$y = e^{-\int \phi dx} \{ \int z e^{\int \phi dx} + \bar{c} \} = e^{-\int \phi dx} \{ c \int e^{\int (2\phi + f - p) dx} dx + \bar{c} \}.$$

(ii) 当 $n \neq 1$ 时, 令 $z^{1-n} = u$. 则有

$$\frac{1}{1-n} \frac{du}{dx} = z^{1-n} \frac{dz}{dx} = (\phi - p) u + f,$$

即

$$\frac{du}{dx} = (1-n)(\phi - p)u + (1-n)f.$$

这是关于 u 的一阶线性非齐次微分方程, 用常数变易法可解得

$$u = e^{(1-n)\int (\phi - p) dx} \{ (1-n) \int f e^{(n-1)\int (\phi - p) dx} dx + c \}.$$

所以

$$z = u^{\frac{1}{1-n}} = [e^{(1-n)\int (\phi - p) dx} \{ (1-n) \int f e^{(n-1)\int (\phi - p) dx} dx + c \}]^{\frac{1}{1-n}} = e^{\int (\phi - p) dx} \{ (1-n) \int f e^{(n-1)\int (\phi - p) dx} dx + c \}^{\frac{1}{1-n}},$$

而 $z = y' + \varphi y$. 故

$$y = e^{-\int \varphi dx} \int z e^{\int \varphi dx} dx + \bar{c} e^{-\int \varphi dx} = e^{-\int \varphi dx} \left\{ \int e^{\int (2\varphi - p) dx} \left[(1-n) \int f e^{(n-1)\int \varphi dx} dx + c \int \frac{1}{1-n} dx + \bar{c} \right] \right\}.$$

注 当 $\varphi = -r$, 即得在文[2]中的定理 1.

3 应用举例

例 1 解方程 $y'' + x y' + (x \tan x) y = 0$.

解: 此方程中, $p = x$, $q = 1 + x \tan x$. 从而, $q = 1 + x \tan x$, 此即令 $f = \tan x$, 满足定理 1 条件. 故方程可积, 将 $p = x$ 代入可得通解为

$$y = c |\cos x| \int \frac{1}{\cos x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \bar{c} |\cos x|.$$

例 2 解方程 $(c + x^n) y'' - n x^{n-1} y' - (c + x^n)^3 y = 0$, 其中 c 为任意实数.

解: 此方程中 $p = \frac{nx^{n-1}}{c + x^n}$, $q = -(c + x^n)^2$. 所以, $q = -x^{2n} + (p - 2c)x^n - c^2 + cp + nx^{n-1}$, 即取 $f = c$, $\varphi = x^n$ 满足定理 2 条件, 故方程可积且通解为

$$y = e^{-\int \varphi dx} \left\{ c_1 \int e^{2cx + \frac{2x^{n+1}}{n+1} + \int \frac{pn-1}{c+x^n} dx} dx + c_2 \right\}.$$

例 3 解方程 $y'' + y' \sin x + (2x + x^2 \sin x - x^4) y = (y' + x^2 y)^{10} \cos x$.

解: 此时 $\varphi = x^2$ 非常数, 故在文[2]的定理 1 无法判断本题的可积性. 因为, $p = \sin x$, $q = 2x + x^2 \sin x - x^4$, $\varphi = x^2$. 所以, $q = \phi - \varphi^2 + p\varphi = 2x - x^4 + x^2 \sin x$, 满足定理 3 的条件, 故可积. 又 $n = 10 \neq 1$, 将 $p = \sin x$, $f = \cos x$ 代入可得通解为

$$y = e^{-\frac{x^3}{3}} \left\{ \int e^{-\frac{2x^3}{3} + \cos x} \left[-9 \int (\cos x) e^{9(\frac{x^3}{3} \cos x)} dx + c \int \frac{1}{9} dx + \bar{c} \right] \right\}.$$

4 结束语

本文利用初等方法, 研究了一类方程的可积性问题, 得到方程可积的若干充分判据, 为将来进一步研究方程可积性打下基础.

参 考 文 献

- 1 巴 英. 推广的 Riccati 方程可积的若干充分条件[J]. 南京师范专科学校学报(自然科学版), 1999, 15(5): 24~ 28
- 2 张学元. 一类新二阶非线性微分方程的可积判据[J]. 南阳师范学院学报(自然科学版), 2004, 3(3): 15~ 18
- 3 张学元. 二阶线性齐次微分方程的一个可积定理[J]. 上海第二工业大学学报, 2002, (1): 14~ 19
- 4 王全义. 线性微分积分方程的周期解[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 2001, 22(2): 117~ 121
- 5 东北师范大学数学系微分方程研究室. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982. 1~ 83

Integral Criterion of the Second Order Differential Equation

Wu Jintang Xu Weizhong

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract In this paper, we study the integral criterion of the second order differential equation. Two functions $f(x)$ and $\varphi(x)$ are introduced as intermediary, by transforming, the second order differential equations are reduced into one order. Some integrable sufficient conditions are given, and the general solution can be expressed by $f(x)$ and $\varphi(x)$.

Keywords second order differential equation, special solution, general solution, sufficient condition, integrable criterion, depression of order