

文章编号 1000-5013(2005)03-0306-04

运筹学的最大元素法及其应用

张 银 明

(华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要 对一类目标为最大值的问题, 目前多使用位势法、分支定界法等一些较为复杂的方法. 文中介绍最大元素法求解一类最大值运筹学问题的可行求解方法, 以及其基本算法及应用.
关键词 最大元素法, 运筹学, 最小元素法, 最小值, 最大值
中图分类号 O 22 文献标识码 A

运筹学中的运输调配、分配等一类问题, 其最优解的目标是求最小值, 求解的可行方法有西北角法、最小元素法、匈牙利法和位势法等. 而对于一类要求目标最大值的问题, 则可应用最大元素法. 这种方法对求解问题的最大值是可行的, 但在运筹学的书中极少提及. 虽然, 文[1]提到这种方法, 也只是一笔带过. 实际上, 该方法也是求解运筹学相关问题极其有意义的一种实用技术.

1 最大元素法的基本理论

1.1 求最大值问题的数学模型

运筹学的运输调运或工作分配的效益问题, 一般可叙述有 M 个供应点或人员 A_i , 其供应量或人数分别为 G_i ; 有 N 个需求点或工作 B_j , 其需求量分别为 Q_j . 从 A_i 到 B_j 的运输收益, 或者 A_i 从事 B_j 的工作效率为 C_{ij} , 其中 $i=1, 2, \dots, M, j=1, 2, \dots, N$. 要求效益或效率最大的调配方案, 可归结成线性规划问题. 假设 X_{ij} 表示 A_i 到 B_j 或 A_i 从事 B_j 的调配待定量, 不妨称为元素, 则其数学模型可为

$$\max Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} . \tag{1}$$

它受约束于

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = G_i, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{3}$$

在上式中, $X_{ij} \geq 0$. 这类问题的调配表, 可使用一般形式的“调运分配表”, 如表1所示. 不妨假设供需平

表 1 货郎担(或排序)问题一般调运分配表

项 目	A_1	A_2	...	A_n	供 数
A_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	G_1
	X_{11}	X_{12}	...	X_{1n}	
A_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	G_2
	X_{21}	X_{22}	...	X_{2n}	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_n	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nn}	G_m
	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nn}	
需求量	Q_1	Q_2	...	Q_n	

衡, 因此有

$$\sum_{i=1}^m G_i = \sum_{j=1}^n Q_j.$$

如供需不平衡, 可增虚设点及相应的需求或供应量, 使供需平衡. 这类问题求解方法可用最大元素法.

1.2 最大元素法的基本概念

(1) 最大元素法. 在调配时, 从效益(或效率) C_{ij} 最大的元素开始分配的方法, 称为最大元素法. (2) 空格或空元素. 在调配中没有得到分配的格子或元素, 称为空格或空元素. (3) 闭合回路. 其定义与调运问题相同. (4) 检验数. 在一个闭合回路内, 当调整一个单位的运输量(或人员)所引起的效益(或效率)的增加或减少的数量, 称为该闭合回路的检验数. 记作 ΔX_{ij} .

1.3 最优方案的判别

当且仅当调配表中所有空格的检验数全小于或等于零时, 其调配方案为最优方案, 相应的解为最优解. 如果某个元素的检验数等于零, 说明该问题的最优方案不是唯一的. 但最优解的最大值则是唯一的.

2 求解算法设计及其应用

2.1 最大元素法的求解算法

(1) 在尚未得到分配的元素中, 查找 C_{ij} 最大且 $G_i \neq 0$ 与 $Q_j \neq 0$ 的元素, 给该元素进行分配, 则 $Q_j = \min(G_i, Q_j)$. 计算 $G_i = G_i - X_{ij}$, $Q_j = Q_j - X_{ij}$. (2) 核对是否所有的 G_i , Q_j 皆等于零. 若不是, 执行(1); 否则, 执行(3). (3) 查找空元素的闭合回路, 并计算其检验数 ΔX_{ij} . (4) 检查是否所有的空元素的检验数 ΔX_{ij} 都小于等于零. 若不是, 转(5); 否则转(6). (5) 如有多个闭合回路的检验数大于 0, 则对检验数最大的闭合回路进行调整, 调后转(3). (6) 给出最优方案, 并计算最优解的 Z 值. 算法结束.

2.2 算法的应用

2.2.1 举例 1 以文[1]第六章第 2 节例 4 的任务分配问题为例. A_1, A_2 和 A_3 分别为高级持工、一般持工和学徒工, B_1, B_2 和 B_3 分别为支模、折模和制模, C, D 分别为现有劳力、需要劳力. 如何调配才能使劳动总效率 Z 最大. 这个问题的求解过程, 可以使用表上作业法给予说明. 表 2, 3 为初始分配方案和分配结果表. (1) 根据最大元素法的分配算法, 其分配过程为 $\max(C_{ij}) = 26, X_{12} = \min(12, 8) = 8; Q_2 =$

表 2 例 1 的任务分配总效率最大问题的初始分配方案表

项 目	B_1		B_2		B_3		$C/\text{人}$
A_1	14	X_{11}	26 8	X_{12}	16 4	X_{13}	12
A_2	11 14	X_{21}	20	X_{22}	12 16	X_{23}	30
A_3	6 10	X_{31}	18	X_{32}	7	X_{33}	10
D	24		8		20		52: 52

表 3 例 1 的任务分配总效率最大问题的分配结果表

项 目	B_1		B_2		B_3		$C/\text{人}$
A_1	14	X_{11}	26	X_{12}	16 12	X_{13}	12
A_2	11 22	X_{21}	20	X_{22}	12 8	X_{23}	30
A_3	6 2	X_{31}	18 8	X_{32}	7	X_{33}	10
D	24		8		20		52: 52

0, $G_1 = 12 - 8 = 4$; 余下尚未分配的效益最大(16)、且 G_i 与 Q_j 不等于 0 的元素是 X_{13} , $X_{13} = \min(4, 20) = 4; G_1 = 0, Q_3 = 20 - 4 = 16$. 同样的分配结果为 $X_{23} = 16, X_{21} = 14, X_{31} = 10$. 得到分配的格子数 = $M +$

$N-1=5$, 故为正常分配的初始方案. (2) 分配方案的检验. 查找空元素的闭合回路及计算检验数为

$$\begin{aligned} X_{11}: X_{11} &\rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11}, \\ \Delta X_{11} &= 14+12-11-16 = -1, \\ X_{22}: X_{22} &\rightarrow X_{12} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22}, \\ \Delta X_{22} &= 20+16-26-12 = -2, \\ X_{32}: X_{32} &\rightarrow X_{31} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{32}, \\ \Delta X_{32} &= 18-6+11-12+16-26 = 1, \\ X_{33}: X_{33} &\rightarrow X_{31} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{33}, \\ \Delta X_{33} &= 7+11-12-6 = 0. \end{aligned}$$

(3) 进行调整. 因 X_{32} 闭合回路的检验数大于 0, 故需进行调整. X_{12} 调 8 给 X_{32} , X_{23} 调 8 给 X_{13} , X_{31} 调 8 给 X_{21} . 调整的结果, 如表 3 所示. 现在计算新方案中所有空元素的检验数. $\Delta X_{11} = -1$, $\Delta X_{12} = -1$, $\Delta X_{22} = -3$, $\Delta X_{33} = 0$. (4) 给出最优方案及最优解结果. 高级技工有 12 人制模, 一般技工有 22 人支模及 8 人制模, 学徒工有 2 人支模及 8 人拆模. 最优解的总效率 $Z = 686$. 结果与文[1]答案完全一致. 文[1]使用最大元素法确定初始方案, 而应用位势法求最优方案.

2.2.2 举例 2 参见文[2]习题 3.5. 某公司去外地采购 A, B, C, D 共 4 种服装, 数量(k)分别为 1 500 套, 2 000 套, 3 000 套, 3 500 套. 有 3 个城市可供应上述规格服装, a, b, c 城市分别为 2 500 套, 2 500 套, 5 000 套. 由于这些城市的服装质量、运价为销售情况不一, 预计售后的利润 s 也不同, 请帮助该公司确定一个预期盈利最大的采购方案. 按如下方法解此问题. (1) 应用最大元素法求解, 因供需平衡, 故直接进行分配. 初始和调整后的分配方案, 如表 4, 5 所示. (2) 计算各个空元素的检验数, 即 $\Delta X_{14} = -3 < 0$, $\Delta X_{21} = -3 < 0$, $\Delta X_{22} = -4 < 0$, $\Delta X_{24} = -5 < 0$, $\Delta X_{31} = 1 > 0$, $\Delta X_{33} = 0$. 因 X_{31} 的闭合回路的检验数大于 0, 故必须进行调整. (3) 进行调整. 将 X_{32} 的 1 500 调给 X_{12} , 而 X_{11} 的 1 500 调给 X_{31} . 其结果如表 5 所示. 调整后的分配格子数为 $5 < m + n - 1 = 6$. 这是表上作业法的退化现象. 可以将调配前的

表 4 例 2 的初始分配方案

项目	$s/\text{元} \cdot \text{套}^{-1}$	方案 A	$s/\text{元} \cdot \text{套}^{-1}$	方案 B	$s/\text{元} \cdot \text{套}^{-1}$	方案 C	$s/\text{元} \cdot \text{套}^{-1}$	方案 D	k
a	10	X_{11} 1 500	5	X_{12} 500	6	X_{13} 500	7	X_{14}	2 500
b	8	X_{21}	2	X_{22}	7	X_{23} 2 500	6	X_{24}	2 500
c	9	X_{31}	3	X_{32} 1 500	4	X_{33}	8	X_{34} 3 500	5 000
k	1 500		2 000		3 000		3 500		10 000: 10 000

表 5 例 2 的调整后的分配方案

项目	$s/\text{元} \cdot \text{套}^{-1}$	方案 A	$s/\text{元} \cdot \text{套}^{-1}$	方案 B	$s/\text{元} \cdot \text{套}^{-1}$	方案 C	$s/\text{元} \cdot \text{套}^{-1}$	方案 D	k
a	10	X_{11}	5	X_{12} 2 000	6	X_{13} 500	7	X_{14}	2 500
b	8	X_{21}	2	X_{22}	7	X_{23} 2 500	6	X_{24}	2 500
c	9	X_{31} 1 500	3	X_{32} 0	4	X_{33}	8	X_{34} 3 500	5 000
k	1 500		2 000		3 000		3 500		10 000: 10 000

X_{11} 或 X_{32} 其中之一作为分配 0 处理. 因为求最大值, 所以选效益小的元素 X_{32} . (4) 重新计算检验数. 其结果为: $\Delta X_{11} = -1$, $\Delta X_{14} = -3$, $\Delta X_{21} = -4$, $\Delta X_{22} = -4$, $\Delta X_{24} = -5$, $\Delta X_{33} = 0$. 如选 X_{11} 的分配数为 0, 计算的结果同样是所有空元素的检验数都小于等于零. 这样, 表 5 的分配方案便为最优方案.

(5) 最优方案与最优解. 该公司应采购的服装分别为城市 a 采购 2 000 套服装 B , 500 套服装 C , 城市 b 采购 2 500 套服装 C , 城市 c 采购 1 500 套服装 A , 3 500 套服装 D . 这样预计售后的利润最大为 72 000 元.

2.2.3 举例 3 以文[3]的第 3 章第 7 节中的分支定界法, 其例 2 是工作分配问题. 有 3 个人分配作 3 件不同工作, 求总效率最高的分配方法. 其效率矩阵为

$$E = e_{ij} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

文[3]使用分支定界法求解, 其最优解的总效率为 1.9. 在解此问题时, 可将求解问题转换成一般的最大值调配问题, 如表 6 所示的工作分配总效率最大问题. 按最大元素法, 分配过程为, 最大的效率是 X_{11} 的 0.7. 该元素置 1, 第 1 行和第 1 列进行标志($\sqrt{1}$). 余下未分配且具有分配权的元素, 最大效率为 X_{23} 和 X_{32} 的 0.6. 因 X_{23} 在前, 故先分配, 置 1, 给第 2 行和第 3 列作志($\sqrt{2}$). 同样, 给 X_{32} 置 1, 并给第 3 行和第 2 列做标志. 至此, 分配完成. 其最大效率为 1.9, 结果如表 6 所示.

表 6 例 3 的工作初始分配及结果总效率最大问题

项目	初始分配				分配结果			
	工作 1	工作 2	工作 3	供应量	工作 1	工作 2	工作 3	供应量
人员 1	0.7	0.3	0.4	1	0.7 1	0.3	0.4	1 $\sqrt{1}$
人员 2	0.5	0.3	0.6	1	0.5	0.3	0.6 1	1 $\sqrt{2}$
人员 3	0.2	0.6	0.4	1	0.2	0.6 1	0.4	1 $\sqrt{3}$
需求量	1	1	1		1 $\sqrt{1}$	1 $\sqrt{3}$	1 $\sqrt{2}$	

3 结束语

从上面的简单论述中, 可以看到最大元素法用于求解运筹学中一类最大值问题, 是可行和有效的. 与目前常用的位势法、分支定界法相比, 它更为简便, 是一种极有意义的求解方法. 当然, 一般的求解过程需要进行多次迭代, 方可获得最优解. 如果使用作者研制的元素判别值分配法^[4], 也可以进行求解, 而且只需一次分配便可得到最优解. 这也是元素判别值分配法的新应用, 有关求解算法将另文介绍.

参 考 文 献

1 吴文江, 袁仪方. 实用数学规划[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993. 199~ 201
2 甘应爱, 田 丰. 运筹学[M]. 修订版. 北京: 清华大学出版社, 1994. 101~ 102
3 蔡宣三. 最优化与最优控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 1983. 115~ 116
4 张银明. 元素判别值分配法及其算法设计[J]. 计算机工程与应用, 1995, 12(6): 25~ 31

The Method of Maximal Element in Operational Research
and Its Application
Zhang Yinming

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract The method minimum element can be used in solving such issues as dispatching, transportation and distribution in operational research, which aims at solving minimum value, while such fairly complicated methods as potential method and branchr bounding method aiming at issues of maximum value are mostly used at present. As a matter of fact, the method of maximum element is a feasible method for solving issues of operational research aiming at maximum value.
Keywords operational research, method of minimum elements, method of maximum elements, minimum value, maximum value