

文章编号 1000-5013(2005)03-0287-04

非比例阻尼结构频响函数计算的 高精度级数展开法

邱文龙 童 昕

(华侨大学机电及自动化学院, 泉州 福建 362021)

摘要 基于复模态理论的复模态展开法是非比例阻尼结构频响函数计算的重要方法, 该方法由于截断高阶模态, 而产生较大误差. 本文用低阶模态和系统矩阵表达高阶模态对非比例阻尼结构频响函数的贡献. 提出非比例阻尼结构频响函数计算的高精度级数展开方法, 提高计算精度. 文中的算例表明本文方法的有效性和正确性.

关键词 阻尼结构, 频响函数, 模态展开法, 级数展开

中图分类号 O 322; TB 123 **文献标识码** A

频响函数的计算是结构动力分析、控制、参数识别和故障诊断的重要环节, 在工程中有重要的应用^[1~5]. 非比例粘性阻尼结构是普遍存在的工程结构, 针对非比例粘性阻尼结构快速精确地计算频响函数, 在工程中具有重要意义. 模态展开计算方法计算较为简便, 但由于计算时截断高阶模态, 影响计算精度. 文 [6] 针对无阻尼结构频响函数计算的高精度展开法, 提高无阻尼结构频响函数的计算精度. 比例粘性阻尼结构频响函数的计算, 可以通过实模态理论来完成. 所以, 文 [6] 的方法可以推广到比例粘性阻尼结构. 非比例粘性阻尼结构与比例粘性阻尼结构不同, 其运动方程中含有非比例阻尼矩阵; 频响函数的计算, 要通过阻尼结构的复模态理论完成. 本文针对非比例粘性阻尼结构, 提出频响函数计算的高精度级数展开法. 在计算量增加不大的前提下, 可望提高计算精度.

1 频响函数高精度级数展开

非比例粘性阻尼结构在拉氏域中的运动方程为^[7]

$$(Ms^2 + Cs + K)X(s) = F(s), \tag{1}$$

式(1)中 M , C , K 分别为结构的刚度阵、非比例阻尼阵和质量阵; $X(s)$, $F(s)$, 分别为结构的位移向量和载荷向量. 假设结构的自由度为 N . 该结构共有 $2N$ 阶模态, 其中第 $2i$ 阶模态 ($i = 1, 2, \dots, N$) 与第 $(2i-1)$ 阶模态共轭. 其传递函数矩阵的复模态表达式为^[7]

$$H(s) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{s - \lambda_i}, \tag{2}$$

其中 λ_i , Ψ_i 分别为满足如下方程和条件的复模态特征值和特征向量. 即

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K) \Psi_i = 0, \tag{3}$$

$$(\Psi_i^T 2\lambda_i M + C) \Psi_i = 1. \tag{4}$$

将 $s = j\omega$ 代入到式(2)中, 可以得到结构的频响函数为

$$H(j\omega) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{j\omega - \lambda_i}. \tag{5}$$

可计算得到 $2L$ 阶低阶模态. 由它们近似计算 $[0, \omega]$ ($0 < \omega < \omega_{2L+1}$) 频域内的频响函数, 并得表达式为

收稿日期 2004-09-23

作者简介 邱文龙(1964-), 男, 实验师, 主要从事动力学及工程结构问题的研究. E-mail: llylg@hqu.edu.cn

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\mathbf{H}(j\omega) \approx \sum_{i=1}^{2L} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{j\omega - \lambda_i}. \quad (6)$$

其误差修正项为

$$\mathcal{E}(j\omega) = \sum_{i=2L+1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{j\omega - \lambda_i}. \quad (7)$$

将式(7)写为

$$\mathcal{E}(j\omega) = \sum_{i=2L+1}^{2N} \left(-\frac{1}{\lambda_i} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{1 - \frac{j\omega}{\lambda_i}} \right). \quad (8)$$

由于 $0 < \omega < \omega_{2L+1}$, 所以当 $i \geq 2L+1$, 有 $|j\omega| < |\lambda_i|$. 将式(3)展开为泰勒级数, 有

$$\mathcal{E}(j\omega) = - \sum_{i=2L+1}^{2N} \Psi_i \Psi_i^T \left[\frac{1}{\lambda_i} + \frac{j\omega}{\lambda_i^2} + \frac{(j\omega)^2}{\lambda_i^3} + \dots \right]. \quad (9)$$

下面导出该级数中各项由低阶模态表达的表达式. 方程(1)中的系数矩阵与传递函数矩阵有关系为

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}) \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{s - \lambda_i} = \mathbf{I}. \quad (10)$$

令 $s=0$, 有关系

$$\mathbf{K} \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i} = -\mathbf{I}. \quad (11)$$

将式(10)依次对 s 求一阶、二阶、... 偏导, 有

$$\left. \begin{aligned} (2s\mathbf{M} + \mathbf{C}) \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{s - \lambda_i} - (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}) \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{(s - \lambda_i)^2} &= 0, \\ 2\mathbf{M} \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{s - \lambda_i} - 2(2s\mathbf{M} + \mathbf{C}) \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{(s - \lambda_i)^2} + 2(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}) \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{(s - \lambda_i)^3} &= 0, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

令 $s=0$, 有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C} \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i} + \mathbf{K} \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^2} &= 0, \\ \mathbf{M} \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i} + \mathbf{C} \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^2} + \mathbf{K} \sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^3} &= 0, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

考虑 \mathbf{K} 阵为正定阵 \mathbf{K} 并为半正定阵时, 可以通过移位方法转换为正定阵. 由式(11)有

$$\sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i} = -\mathbf{K}^{-1}. \quad (14)$$

代入式(13)中的第1个表达式中, 有

$$\sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^2} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1}. \quad (15)$$

将式(14), (15)代入式(13)的第2个表达式中, 有 $\sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^3} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1}$. 同理, 依次代入式

(13)中其它表达式中, 可以得到 $\sum_{i=1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^n}$ ($n=4, 5, 6, \dots$) 的类似表达式. 由此得到误差修正项(9)级数中各项的表达式方程组为

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=2L+1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i} &= \mathbf{K}^{-1} - \sum_{i=1}^{2L} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i}, \\ \sum_{i=2L+1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^2} &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} - \sum_{i=1}^{2L} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^2}, \\ \sum_{i=2L+1}^{2N} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^3} &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} - \sum_{i=1}^{2L} \frac{\Psi_i \Psi_i^T}{\lambda_i^3}, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

它们由低阶模态和结构矩阵表达. 将它们代入到误差修正项(9)中, 可以得到满足各级精度要求的误差修正. 随着所取修正项的增加, 计算精度不断提高. 同无阻尼结构的修正方法相类似, 其增加的计算量不大, 却可以得到高精度的计算结果. 为验证所提出的修正方法的精度, 本文特给出算例.

2 计算算例

本文针对图 1 所示的 12 自由度离散阻尼结构计算频响函数, 其结构参数见表 1. 表中刚度为 k_i , 阻尼为 c_i , 质量为 m_i . 首先, 取全模态计算频响函数, 它可以做为精确解. 然后, 取低阶的两对共轭模态(前四阶模态) 计算(0, 80 Hz) 频率(f) 范围内的频响函数. 例如, 图 2 列出两种计算方法得到的 $H_{33}(j\omega)$. 图 2(a) 表示振幅 M 与频率 f 的对应关系; 图 2(b) 表示相位 P 与频率 f 的对应关系. 由图可见, 在非共振频域里, 由低阶的两对共轭模态计算频响函数有明显的误差. 特别是在第 2 对共轭模态的共振频率范围附近, 第 2 对共轭模态向量在第 2 自由度上的分量的模很小, 第 2 对共轭模态对 $H_{33}(j\omega)$ 贡献较弱. 高阶模态的贡献与其相当, 忽略高阶模态导致 $H_{33}(j\omega)$ 的计算误差较大. 分别取式(17)的 1 个修正项和 3 个修正项修正计算, 结果见图 2. 各种算法的误差见表 2, 3. 可见, 计算精度有显著提高.

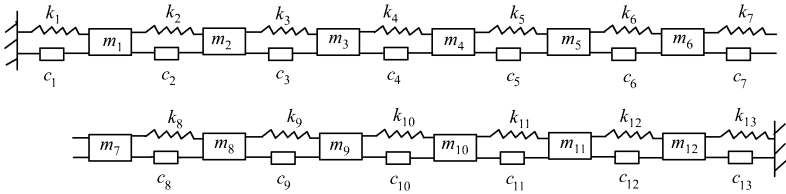
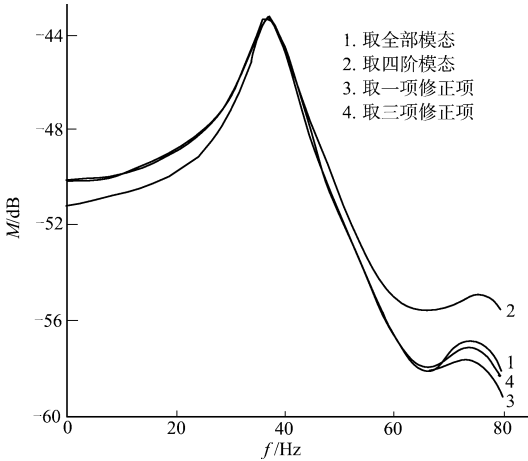


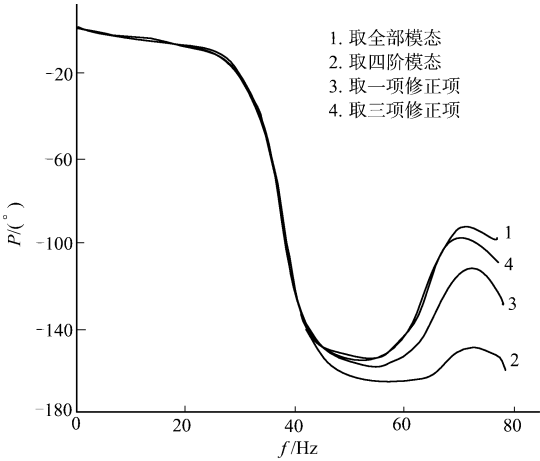
图 1 算例结构示意图

表 1 图 1 所示结构的参数值

结构参数	i												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m/kg	32.0	16.0	8.0	4.0	2.0	1.0	1.0	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0	—
$k_i/\text{MN} \cdot \text{m}^{-1}$	0.1	0.2	0.4	0.8	1.6	3.2	6.4	3.2	1.6	0.8	0.4	0.2	0.1
$c_i/\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$	400	450	500	320	400	450	400	450	500	320	400	450	500



(a) 振幅图



(b) 相频图

图 2 频响函数计算结果

表 2 各种算法计算频响函数幅值相对误差比较

f/Hz	取四阶模态	取一项修正项	取三项修正项
10	$0.162\,847 \times 10^{-1}$	$-0.603\,136 \times 10^{-3}$	$0.603\,136 \times 10^{-3}$
20	$0.165\,848 \times 10^{-1}$	$0.614\,251 \times 10^{-3}$	$0.409\,500 \times 10^{-3}$
30	$0.852\,515 \times 10^{-2}$	$0.106\,564 \times 10^{-3}$	$-0.426\,257 \times 10^{-3}$
40	$0.183\,824 \times 10^{-2}$	$0.919\,118 \times 10^{-3}$	$-0.919\,118 \times 10^{-3}$
50	$-0.188\,679 \times 10^{-1}$	$-0.589\,623 \times 10^{-3}$	$0.393\,082 \times 10^{-3}$

续表

f/Hz	取四阶模态	取一项修正项	取三项修正项
60	$-0.278\,270\times 10^{-1}$	$0.531\,726\times 10^{-3}$	$-0.354\,484\times 10^{-3}$
70	$-0.355\,019\times 10^{-1}$	$0.104\,931\times 10^{-1}$	$0.489\,682\times 10^{-3}$
80	$-0.465\,999\times 10^{-1}$	$0.148\,429\times 10^{-1}$	$0.310\,666\times 10^{-3}$

表 3 各种算法计算频响函数相位值相对误差比较

f/Hz	取四阶模态	取一项修正项	取三项修正项
10	$-0.248\,963\times 10^{-1}$	$-0.145\,228\times 10^{-1}$	$0.622\,407\times 10^{-2}$
20	$-0.138\,568\times 10^{-1}$	$-0.923\,788\times 10^{-2}$	$0.461\,894\times 10^{-2}$
30	$0.301\,205\times 10^{-2}$	$0.200\,803\times 10^{-2}$	$0.100\,402\times 10^{-2}$
40	$-0.491\,481\times 10^{-3}$	$-0.655\,308\times 10^{-3}$	$0.327\,654\times 10^{-3}$
50	$-0.740\,863\times 10^{-1}$	$0.275\,930\times 10^{-1}$	$0.757\,326\times 10^{-2}$
60	$-0.131\,912\times 10^0$	$0.295\,770\times 10^{-1}$	$0.270\,728\times 10^{-1}$
70	$-0.614\,058\times 10^0$	$0.208\,733\times 10^0$	$0.136\,315\times 10^{-1}$
80	$-0.562\,859\times 10^0$	$0.266\,505\times 10^0$	$0.325\,717\times 10^{-1}$

4 结束语

取低阶模态计算阻尼结构的低频的频响函数,在非共振区域误差较为明显,在低阶模态向量分量的模很小的点上的频响函数,误差更大.本文针对非比例阻尼结构提出频响函数计算的高精度级数展开方法,在计算量增加不大的前提下,可以得到满足各级精度的计算结果.

参 考 文 献

1 吴余华,孙月明,程耀东.机械系统频响函数的高阶统计分析方法[J].中国机械工程,1994,5(6):57~58
2 王朝晖,高潮庆.发动机缸压的频响函数诊断法[J].金属矿山,1996,(2):29~30
3 吴家驹,朱曦全,夏益霖.频响函数综合法预测结构在水下的动特性[J].应用力学学报,1997,14(4)14~20
4 陶 晨,丁振宇.频响函数在地铁弹性车轮上的应用[J].城市轨道交通研究,2002,(1):24~27
5 孙晨工,夏群生,张庆勇等.卧姿人体频响函数的测量和分析[J].客车技术与研究,1999,21(1):43~45,42
6 瞿祖清,傅志方.频响函数计算的高精度级数展开方法[J].计算力学学报,1998,15(2):144~148
7 倪金福,张阿舟.关于复模态理论的几个问题[J].南京航空学院学报,1982,(10):1~9

A High Accurate Method of Series Expansion for
Calculating Frequency Response Function of
Disproportional Damping Structure

Qiu Wenlong Tong Xin

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract Complex modal theory-based method of complex modal expansion is an important method for calculating frequency response function of disproportional damping structure. The method engenders fairly markable error because of truncating the mode shape of high order. In this paper, the contribution of high order mode shape to the frequency response function of disproportional damping structure is expressed by using low order mode shape and system matrix. In order to promote accuracy of computation, the authors propose a high accurate method of series expansion for calculating frequency response function of disproportional damping structure. The efficiency and correctness of this method are indicated by numerical examples.

Keywords damping structure, frequency response function, method of modal expansion, series expansion