第 26 卷 第 3 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 26 No. 3
2005 年 7 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jul. 2005

文章编号 1000-5013(2005)03-0239-04

解高阶抛物型方程的三层显式差分格式

单 双 荣

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 对高阶抛物型方程提出一个三层显式差分格式, 其局部截断误差阶是 $O(\tau^2+h^4)$. 证明当 m 为 1, 2, 3 时, 其稳定性条件为 $r=\tau/h^{2m}<1/2^{2m-1}$. 数值例子表明所提的格式是有效的, 理论分析是正确的.

关键词 高阶抛物型方程, 高精度, 显式差分格式.

中图分类号 O 241.82　　文献标识码 A

本文考虑如下的高阶抛物型方程周期初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=(-1)^{m+1}\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}, && x\in R,\quad t>0,\\ &u(x,0)=f(x), && x\in R,\\ &u(x+L,t)=u(x,t), && x\in R,\quad t>0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中 **R**$=(-\infty,\infty)$, $f(x)$ 为周期为 L 的周期函数. 1960 年, Саульев 在文[1]中对方程(1)混合问题, 提出了一类含权因子 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ 的两层差分格式

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}=(-1)^{m+1}\left\{\alpha\frac{\delta_x^{2m}u_i^{n+1}}{h^{2m}}+(1-\alpha)\frac{\delta_x^{m}u_i^{n}}{h^{2m}}\right\}\tag{2}$$

(初边值条件处理同文[1], 从略, 下同). 式中 τ, h 分别为时间 t 及空间方向 x 的步长, u_i^n 为 $u(ih, n\tau)$ 的差分逼近, δ_x^{2m} 表示 x 方向的 $2m$ 阶中心差分算子, m 为正整数. 当 $\alpha=0$ 时, 它为显格式, 其局部截断误差阶为 $O(\tau+h^2)$, 而稳定性条件为 $r=\dfrac{\tau}{h^{2m}}\leqslant\dfrac{1}{2^{2m-1}}$. 而在其他情况下, 它均为隐格式, 其局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2)$(当 $\alpha=\dfrac{1}{2}$)或 $O(\tau+h^2)$. 本文将采用待定系数法, 构造出一个两层高精度隐格式及一个三层高精度显格式, 两者的局部截断误差阶都是 $O(\tau^2+h^4)$. 证明了当 $m=1, 2, 3$ 时, 前者是绝对稳定的, 后者的稳定性条件为 $r<\dfrac{1}{2^{2m-1}}$.

1 差分格式的构造

用如下含参数的差分方程逼近微分方程(1), 有

$$\eta_0\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}+\eta_1\frac{u_{i-1}^n-u_{i-1}^{n-1}}{\tau}+\eta_2\frac{u_i^n-u_i^{n-1}}{\tau}+\eta_3\frac{u_{i+1}^n-u_{i+1}^{n-1}}{\tau}+\eta_4\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{\tau}=$$

$$(-1)^{m+1}\left\{\eta_5\frac{\delta_x^{2m}u_i^n}{h^{2m}}+\eta_6\frac{\delta_x^{2m}u_i^{n-1}}{h^{2m}}\right\},\tag{3}$$

其中 η_0, η_1, η_2, …, η_6 为待定参数. 适当选取这些参数, 可以使差分格式(3)逼近微分方程(1)具有尽可能高阶的离散误差, 而且有较好的稳定性. 当问题(1)的解充分光滑时, 仿照文[2], 将格式(3)中的 u 在节点$(ih, n\tau)$处展开成 Taylor 级数, 可知为使局部截断误差阶达到 $O(\tau^2+h^4)$, 必须同时满足诸条件为

收稿日期 2004-09-30
作者简介 单双荣(1956-), 男, 副教授, 主要从事计算数学的研究. E-mail: shansr@163.com
基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(04QZR09)

$$\left.\begin{aligned}&\eta_0+\eta_1+\eta_2+\eta_3+2\eta_4=1, \quad \eta_5+\eta_6=1, \quad \frac{1}{2}(\eta_0-\eta_1-\eta_2-\eta_3)=-\eta_6\\ &\eta_1-\eta_3=0, \quad \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_3)=(\eta_5+\eta_6)\frac{m}{12}, \quad \frac{1}{4}(\eta_1+\eta_3)=\eta_6\frac{m}{12}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

解方程组(4)得

$$\left.\begin{aligned}&\eta_0=\eta, \quad \eta_1=\eta_3=\frac{m}{12},\\ &\eta_2=\eta+1-\frac{m}{6}, \quad \eta_4=-\eta, \quad \eta_5=\eta_6=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

将式(5)代入格式(3),得局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^4)$ 的如下两层高精度隐格式

$$\begin{aligned}&\frac{m}{12}(u_{i-1}^n+u_{i+1}^n)+\left(1-\frac{m}{6}\right)u_i^n+(-1)^m\frac{r}{2}\delta_x^{2m}u_i^n=\\ &\frac{m}{12}(u_{i-1}^{n-1}+u_{i+1}^{n-1})+\left(1-\frac{m}{6}\right)u_i^{n-1}+(-1)^{m+1}\frac{r}{2}\delta_x^{2m}u_i^{n-1}.\end{aligned} \tag{6}$$

特例 **1** $m=1$ 为抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 格式(6) 即文〔3〕表 8.1 格式(12)或文〔4〕格式 (2.6).

特例 **2** $m=2$ 为四阶抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$, 格式(6)成为文〔1〕中, $\alpha=\frac{1}{6}$ 格式或文〔4〕格式(7).

为了得到显式格式, 将式(4)中最后一个方程丢掉, 然后从其余5个方程得

$$\left.\begin{aligned}&\eta_0=\frac{m}{6}+\omega-2\eta, \quad \eta_1=\eta_3=\frac{m}{12}, \quad \eta_2=\omega,\\ &\eta_4=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}m-\omega+\eta, \quad \eta_5=1-\eta, \quad \eta_6=\eta\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

将式(7)代入格式(3),得如下三层高精度显式差分格式为

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}-\eta\right)u_i^{n+1}=&\left(\frac{m}{6}-2\eta\right)u_i^n-\frac{m}{12}(u_{i-1}^n+u_{i+1}^n)+(-1)^{m+1}(1-\eta)r\delta_x^{2m}u_i^n+\\ &\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{6}+\eta\right)u_i^{n-1}+\frac{m}{12}(u_{i-1}^{n-1}+u_{i+1}^{n-1})+(-1)^{m+1}\eta r\delta_x^{2m}u_i^{n-1}.\end{aligned} \tag{8}$$

这是一个三层显格式, 其局部截断误差阶为 $O(\tau^2+\tau h^2+h^4)$. 注意到 $O(\tau h^2)\leqslant\max\{O(\tau^2),O(h^4)\}$, 故显格式(8)的局部截断误差阶也是 $O(\tau^2+h^4)$.

特例 **1** $m=1$, 即得抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的三层高精度显格式, 也即文〔4〕中的格式(2.8).

特例 **2** $m=2$, 即得四阶抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$ 的三层高精度显式格式, 也即文〔5〕中格式(9).

2 稳定性分析

现用 Fourier 分析法研究差分格式的稳定性. 首先若令 $i^*=\sqrt{-1}$, $S=\sin\frac{\alpha}{2}$, 则当 $m\leqslant3$ 时, 隐格式(6)的传播因子 $|\boldsymbol{G}^*(\tau,\alpha)|=\left|\dfrac{1-\frac{1}{3}ms^2-\frac{r}{2}(4s^2)^m}{1-\frac{1}{3}ms^2+\frac{r}{2}(4s^2)^m}\right|\leqslant1$. 于是, 有

定理 **1** 当 $m=1,2,3$ 时, 两层隐格式(6)恒稳定.

为了证明三层显格式(8)的稳定性, 先介绍两个引理.

引理 **1** 实系数二次方程

$$\lambda^2-G_{11}\lambda-G_{12}=0 \tag{9}$$

的两根满足 $|\lambda_{1,2}|\leqslant1$ 的充要条件是 $|G_{11}|\leqslant1-G_{12}\leqslant2$.

引理 **2**[6] 差分格式(8)稳定, 即其传播矩阵族 $\boldsymbol{G}^n(s^*)(s^*\in[0,2], n=1,2,\dots)$ 一致有界的充要条件: (Ⅰ) $|\lambda_{1,2}|\leqslant1$; (Ⅱ) $N_0^2((1-\frac{1}{4}|G_{11}+G_{22}|^2)^2\cap N_0^2(|(G_{11}-G_{22})^2+4G_{12}G_{21}|)\subseteq N_0^2((G_{11}-G_{22})^2)$

$\cap N_0^2(G_{12}^2)\cap N_0^2(G_{21}^2)$, 其中 $N_0^2(f(s^*))$ 表示多项式 $f(s^*)$ 在 $[0, 2]$ 内所有实根的集合(重根要重复计算).

定理 **2**　当 $m=1, 2, 3$ 时, 三层显格式(8)稳定的一个充分条件是

$$r<\frac{1}{2^{2m-1}},\qquad 且\ \eta<\min\left(0, \frac{6\cdot 4^{m-1}r-m}{12\cdot 4^{m-1}r-6}\right). \tag{10}$$

证明　当 $\eta\neq\frac{1}{2}$ 时, 三层显格式(8)等价于如下两层方程组

$$\left.\begin{aligned} u_i^{n+1}=&\frac{2}{1-2\eta}\Big\{2\Big(\frac{m}{12}-\eta\Big)u_i^n-\frac{m}{12}(u_{i-1}^n+u_{i+1}^n)+(-1)^{m+1}(1-\eta)r\delta_x^{2m}u_i^n+\\ &\Big(\frac{1}{2}-\frac{m}{6}+\eta\Big)v_i^n+\frac{m}{12}(v_{i-1}^n+v_{i+1}^n)+(-1)^{m+1}\eta r\delta_x^{2m}v_i^n,\\ v_i^{n+1}=&u_i^n.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

根据 Fourier 分析法, 令 $u_i^n=u^n e^{i^* i\alpha}$, $v_i^n=v^n e^{i^* i\alpha}$ $(i^*=\sqrt{-1})$, 代入式(11)经整理得

$$\begin{pmatrix}u^{n+1}\\ v^{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^n\\ v^n\end{pmatrix}\xlongequal{记}\boldsymbol{G}\begin{pmatrix}u^n\\ v^n\end{pmatrix},$$

其中 $G_{11}=\frac{2}{1-2\eta}\Big\{\frac{m}{3}s^2-2\eta-(1-\eta)r(4s^2)^m\Big\}$, $G_{12}=\frac{2}{1-2\eta}\Big\{\frac{1}{2}-\frac{m}{3}s^2+\eta-\eta r(4s^2)^m\Big\}$, $G_{21}=1$, $G_{22}=0$, $s=\sin\frac{\alpha}{2}$, $s^*=1-\cos\alpha=2s^2$.

由传播矩阵 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{pmatrix}$, 得形如式(9)的特征方程. 当 $\eta<\frac{1}{2}$ 时, 按引理 1 要求, 为使 $|\lambda_{1,2}|\leqslant 1$, 应使 $1-G_{12}=\frac{1}{1-2\eta}\Big\{\frac{2}{3}s^2-4\eta+2\eta r(4s^2)^m\Big\}\leqslant 2$, 即 $\eta r(4s^2)^m\leqslant 1-\frac{1}{3}s^2$. 此式成立的充要条件为

$$\eta<\frac{1}{2}\qquad 且\ \eta\leqslant\frac{3-m}{3\cdot 4^m r}<\frac{1}{2}. \tag{12}$$

又当 $\eta<\frac{1}{2}$ 时, 条件 $|G_{11}|\leqslant 1-G_{12}$ 等价于

$$-\frac{1}{3}s^2+2\eta-\eta r(4s^2)^m\leqslant\frac{1}{3}s^2-2\eta-(1-\eta)r(4s^2)^m\leqslant\frac{1}{3}s^2-2\eta+\eta r(4s^2)^m\}.$$

上述不等式右端自然成立, 左端化为

$$\eta\leqslant\frac{1}{6}s^2-\frac{1}{4}(1-2\eta)r(4s^2)^m. \tag{13}$$

而式(13)成立的一个充分条件是式(10)成立. 显然, 当式(10)成立时必有 $\eta\leqslant 0$. 注意到当 $m\leqslant 3$ 时, $1-\frac{m}{3}\geqslant 0$, 故此时条件(10)强于条件(12). 而对其他 $m>3$, 则 η 应同时满足条件(10), (12). 因此, 由引理 1 知, 特征方程的两根按模小于等于 1.

对引理 2 而言, 其条件(Ⅰ)已验证. 下面考虑引理 2 的条件(Ⅱ). 因为 $G_{21}=1$, 所以 $N_0^2(G_{21}^2)$ 是空集, 而条件(Ⅱ)成立的充要条件是使 $1-\frac{1}{4}G_{11}^2=G_{11}^2+4G_{12}^2=0$ 成立的 $s^*=2s^2$, 不存在或者不属于区间 $[0, 2]$. 也即 s^2 不存在或不属于 $[0, 1]$. 由 $1-\frac{1}{4}G_{11}^2=0$, 解得 $G_{11}^2=4$. 将其代入 $G_{11}^2+4G_{12}=0$. 得 $G_{12}=-1$. 由此进一步可得

$$\frac{2}{3}ms^2+\eta r(4s^2)^m=2. \tag{14}$$

因为 $\frac{m}{12}>0$, 所以当 $s=0$ 时, 式(14)不成立; 又注意到 $\eta<0$, 故当 $\frac{m}{12}\leqslant\frac{1}{4}$, 即 $m\leqslant 3$ 时, 式(14)的右端 $\leqslant 2s^2+\eta r(4s^2)^m<2$. 因此, 在条件(10)成立的前提下, 使式(14)成立的 $s^*\notin[0, 2]$ (即 $s^*\notin[0, 1]$). 这就证明了当 $m=1, 2, 3$ 时, 在条件(10)下, 格式(8)是稳定的.

3 数值例子

解高阶抛物型方程周期初值问题. 在式(1)中取 $f(x)=\sin x$, $L=2\pi$, 则其精确解为 $u(x,t)=e^{-t}\cdot\sin x$. 利用格式(8)($m=1,2,3$)进行求解.

取 $\Delta x=\pi/32$, $r=1/2^{2^{m-1}}$ 及 $r=1/2^{2^{m-2}}$($m=1,2,3$), $\tau=rh^{2m}$, 按显格式(8)进行计算到 $n=1\,000$, 列出格式解与精确解数值结果比较, 如表 1 所示. 由表 1 看出, 本文所提的格式是有效的, 理论分析是正确的. 条件(10)仅是显式格式(8)稳定的充分条件.

表 1 精度比较表($n=1\,000$)

m	(r,η)	解法	x			
			$5\pi/32$	$22\pi/32$	$39\pi/32$	$56\pi/32$
1	$(\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$	格式(8)	$14.130\,426\times10^{-2}$	$24.923\,846\times10^{-2}$	$-19.016\,354\times10^{-2}$	$-21.195\,989\times10^{-2}$
		精确解	$14.130\,411\times10^{-2}$	$24.923\,820\times10^{-2}$	$-19.016\,334\times10^{-2}$	$-21.195\,989\times10^{-2}$
	$(\frac{1}{2},-12)$	格式(8)	$31.548\,255\times10^{-2}$	$55.646\,140\times10^{-2}$	$-42.456\,809\times10^{-2}$	$-47.323\,164\times10^{-2}$
		精确解	$31.548\,301\times10^{-2}$	$55.646\,235\times10^{-2}$	$-42.456\,871\times10^{-2}$	$-47.323\,233\times10^{-2}$
2	$(\frac{1}{16},-\frac{1}{2})$	格式(8)	$47.003\,025\times10^{-2}$	$82.905\,935\times10^{-2}$	$-63.255\,430\times10^{-2}$	$70.505\,701\times10^{-2}$
		精确解	$47.003\,025\times10^{-2}$	$82.905\,934\times10^{-2}$	$-63.255\,430\times10^{-2}$	$70.505\,701\times10^{-2}$
	$(\frac{1}{8},-6)$	格式(8)	$46.866\,772\times10^{-2}$	$82.655\,178\times10^{-2}$	$-63.071\,604\times10^{-2}$	$-70.301\,514\times10^{-2}$
		精确解	$46.866\,896\times10^{-2}$	$82.655\,606\times10^{-2}$	$-63.072\,065\times10^{-2}$	$-70.301\,319\times10^{-2}$
3	$(\frac{1}{64},-\frac{1}{2})$	格式(8)	$47.139\,344\times10^{-2}$	$83.146\,380\times10^{-2}$	$-63.438\,885\times10^{-2}$	$-70.710\,184\times10^{-2}$
		精确解	$47.139\,344\times10^{-2}$	$83.146\,380\times10^{-2}$	$-63.438\,885\times10^{-2}$	$-70.710\,184\times10^{-2}$
	$(\frac{1}{32},-4)$	格式(8)	$47.139\,014\times10^{-2}$	$83.145\,798\times10^{-2}$	$-63.438\,441\times10^{-2}$	$-70.709\,689\times10^{-2}$
		精确解	$47.139\,014\times10^{-2}$	$83.145\,798\times10^{-3}$	$-63.438\,441\times10^{-2}$	$-70.709\,689\times10^{-2}$

参 考 文 献

1 Саульев K 著. 抛物型方程的网格积分法[J]. 袁兆鼎译. 北京: 科学出版社, 1963. 143~152

2 曾文平. 高阶抛物型方程的一族高精度恒稳差分格式[J]. 计算数学, 2003, 25(3): 347~354

3 Richmyer R D, Moron K W. Difference mehod for iniial-valne problems[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1967. 38~82

4 金承日, 解抛物型方程的高精度显式差分格式[J]. 计算数学, 1991, 13(1): 38~44

5 曾文平, 解四阶抛物型方程的高精度显式差分格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1997, 18(2): 120~127

6 马驷良. 二阶矩阵族一致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用[J]. 高等学校计算数学学报, 1980, (2): 28~45

A Three-Layer Explicit Difference Scheme for Solving the Parabolic Equation of Higher Order

Shan Shuangrong

(Deparmen of Mahemaics, Huaqiao Universiy, 362021, Quanzhou, China)

Abstract A hree-layer explici difference scheme is proposed for solving he parabolic equaion of higher order $\frac{\partial u}{\partial t}=(-1)^{m+1}\frac{\partial^{2m}u}{\partial t^{2m}}$ (where m is a posiive ineger). The local runcaion error of he propesed scheme is in he order of $O(\tau^2+h^4)$. Is sabiliy condiion is proved o be $r=\tau/h^{2m}<1/2^{2^{m-1}}$ when $m=1,2,3$. The proposed scheme is effecive and relevan heoreical analysis is correc, as shown by numerical examples.

Keywords parabolic equaion of higher order, high accuracy, explici difference scheme