

# 解高阶抛物型方程的一族隐式差分格式

曾 文 平

( 华侨大学数学系, 福建 泉州 362021 )

**摘要** 对高阶抛物型方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}$  ( $m$  为正整数), 构造一族含双参数的三层隐式差分格式. 在特殊情况下, 当参数  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$  时得到一个双层格式. 这些格式的截断误差阶均为  $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ . 证明当  $m = 1, 2, 3$  时, 这些格式对任意非负参数  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  都是绝对稳定的. 数值例子表明, 所得格式是有效的, 其理论分析是正确的.

**关键词** 高阶抛物型方程, 隐式差分格式, 稳定性

**中图分类号** O 241.82

**文献标识码** A

本文考虑如下的高阶 ( $2m$  阶) 抛物型方程周期初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \tag{1}$$

其中  $m$  为正整数. 初边界条件从略. 1960 年, Ca y JbEB 在文 [1] 中对高阶抛物型方程 (1) 混合问题, 提出了一类含权因子  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) 的两层差分格式为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = (-1)^{m+1} \left\{ \alpha \frac{\delta_x^{2m} u_j^{n+1}}{(\Delta x)^{2m}} + (1 - \alpha) \frac{\delta_x^{2m} u_j^n}{(\Delta x)^{2m}} \right\}. \tag{2}$$

随后, 文 [2, 3] 利用加耗散项的方法, 构造了若干高稳定性的两层显式差分格式和无条件稳定的两层的半显式格式及三层显格式. 但所有这些格式的精度都较低, 且有些格式相容性条件也很苛刻. 本文构造一族三层 (特殊情况下为两层)、含双参数、高精度的隐式差分格式, 其截断误差为  $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ , 比同类隐式格式精度高二阶. 当参数  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 0$  时, 得到一个双层格式. 证明当  $m = 1, 2, 3$  时, 这族差分格式对任意非负实参数  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  都是绝对稳定的. 文 [1, 4~7] 的结果为本文结果的特例.

## 1 差分格式的提出

对高阶抛物型方程 (1), 提出如下的三层双参数隐式差分格式

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_1}{2\Delta t} \left\{ \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) u_{j+1}^{n+1} - 2\alpha u_{j+1}^n + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) u_{j+1}^{n-1} \right\} + \frac{\zeta_0}{\Delta t} \left\{ \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) u_j^{n+1} - 2\alpha u_j^n + \right. \\ & \left. \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) u_j^{n-1} \right\} + \frac{\zeta_1}{2\Delta t} \left\{ \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) u_{j-1}^{n+1} - 2\alpha u_{j-1}^n + \left( \alpha - \frac{1}{2} \right) u_{j-1}^{n-1} \right\} = \\ & (-1)^{m+1} \left\{ \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \beta \right) \frac{\delta_x^{2m} u_j^{n+1}}{(\Delta x)^{2m}} + \left( \frac{1}{2} - 2\beta \right) \frac{\delta_x^{2m} u_j^n}{(\Delta x)^{2m}} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha + \beta \right) \frac{\delta_x^{2m} u_j^{n-1}}{(\Delta x)^{2m}} \right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

差分格式 (3) 中的实参数偶 ( $\alpha, \beta$ ) 为非负实数偶, 而  $\zeta_0, \zeta_1$  是随  $m$  而变化的待定实常数. 适当选择这些参数, 可以使差分方程 (3) 逼近微分方程 (1) 的离散误差的阶尽可能高, 且有较好的稳定性.  $\delta_x^{2m}$  为关于  $x$  的  $2m$  阶中心差分算子. 当  $m$  确定时,  $\zeta_0, \zeta_1$  就确定了, 而对于参数偶 ( $\alpha, \beta$ ) 的不同选取, 便可得到不同

收稿日期 2004-10-07

作者简介 曾文平 (1940-), 男, 教授, 主要从事计算数学的研究. E-mail: zengw p@hqu.edu.cn

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目 (04QZR09)

的差分格式. 当  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$  时便得一个两层隐格式.

2 截断误差的讨论

对于高阶抛物型方程(1), 差分格式(3)的截断误差阶可达  $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ . 下面给以推导. 记

$$D_t(\alpha, j) = \frac{1}{\Delta t} \{ (\alpha + \frac{1}{2}) u_{j+1}^{n+1} - 2\alpha u_j^n + (\alpha - \frac{1}{2}) u_{j-1}^{n+1} \}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{G}_x^m(n) = \frac{(-1)^{m+1}}{(\Delta x)^{2m}} \mathfrak{G}_x^{2m} u_j^n = \frac{(-1)^{m+1}}{(\Delta x)^{2m}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k u_{j+k}^n. \tag{5}$$

现设问题(1)的解  $u(x, t)$  充分光滑, 使得下列关系式成立, 即

$$\frac{\partial^{q+p} u}{\partial t^q \partial x^p} = (-1)^{(m+1)q} \frac{\partial^{2mq+p} u}{\partial x^{2mq+p}}. \tag{6}$$

于网格点  $(j \Delta x, n \Delta t)$  处作 Taylor 展开, 得  $D_t(\alpha, j) = \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O((\Delta t)^3)$ . 若记

$$B_{2v} = \frac{2}{(2v)!} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k (m-k)^{2v}, \quad v = 0, 1, 2, \dots, \tag{7}$$

进一步可证

$$B_0 = B_2 = \dots = B_{2m-2} = 0, \quad B_{2m} = 1, \quad B_{2m+2} = \frac{m}{12}. \tag{8}$$

于是, 在  $(j, n)$  处进行 Taylor 展开并利用式(5)~(8), 得  $\mathfrak{G}_x^{2m}(n) = (-1)^{m+1} \frac{\mathfrak{G}_x^{2m} u_j^n}{(\Delta x)^{2m}} = (-1)^{m+1} \{ \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + B_{2m+2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^{2m+2} u}{\partial x^{2m+2}} + B_{2m+4} (\Delta x)^4 \frac{\partial^{2m+4} u}{\partial x^{2m+4}} + \dots \}$   
 $= \frac{\partial u}{\partial t} + B_{2m+2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + B_{2m+4} (\Delta x)^4 \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} + \dots$

进一步计算  $D_t(\alpha, j \pm 1)$  及  $\mathfrak{G}_x^{2m}(n \pm 1)$ . 由此可知, 为使差分格式(3)逼近方程(1)的截断误差为  $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ , 参数  $\zeta_0, \zeta_1$  必须满足  $\zeta_0 + \zeta_1 = 1, \frac{\zeta_1}{2} = B_{2m+2}$ . 解此两式并利用  $B_{2m+2}$  的值, 可得  $\zeta_0 = 1 - 2B_{2m+2} = 1 - \frac{m}{6}, \zeta_1 = 2B_{2m+2} = \frac{m}{6}$ . 将上述两式代入式(3), 使得截断误差为  $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$  的三层双参数差分格式, 即

$$\begin{aligned} & \frac{m}{12 \Delta t} \{ (\alpha + \frac{1}{2}) u_{j+1}^{n+1} - 2\alpha u_{j+1}^n + (\alpha - \frac{1}{2}) u_{j-1}^{n+1} \} + \frac{6-m}{6 \Delta t} \{ (\alpha + \frac{1}{2}) u_j^{n+1} - 2\alpha u_j^n + \\ & (\alpha - \frac{1}{2}) u_{j-1}^{n+1} \} + \frac{m}{12 \Delta t} \{ (\alpha + \frac{1}{2}) u_{j-1}^{n+1} - 2\alpha u_{j-1}^n + (\alpha - \frac{1}{2}) u_{j-2}^{n+1} \} = \\ & (-1)^{m+1} \{ (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \beta) \frac{\mathfrak{G}_x^{2m} u_j^{n+1}}{(\Delta x)^{2m}} + (\frac{1}{2} - 2\beta) \frac{\mathfrak{G}_x^{2m} u_j^n}{(\Delta x)^{2m}} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha + \beta) \frac{\mathfrak{G}_x^{2m} u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^{2m}} \}. \end{aligned} \tag{9}$$

其截断误差表达式为

$$\begin{aligned} R_j^n(m) = & (\frac{\zeta_1}{24} - B_{2m+4}) (\Delta x)^4 \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} + (\frac{1}{6} - (\frac{1}{4} + \beta)) (\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \\ & \alpha (\frac{\zeta_1}{12} - B_{2m+4}) \Delta t (\Delta x)^4 \frac{\partial^6 u}{\partial t^2 \partial x^4} + O((\Delta t)^3 + (\Delta t)^2 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^6). \end{aligned} \tag{10}$$

由此可见, 当  $\beta \neq -\frac{1}{12}$  时, 格式(9)的截断误差为  $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ . 当  $\beta = -\frac{1}{12}$  时, 格式(9)的截断误差为  $O((\Delta t)^3 + (\Delta x)^4)$ . 但由后面讨论可知, 它不满足稳定性条件. 特别地, 当  $m = 1$  时, 即对抛物型方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  而言, 注意到此时  $\zeta_1 = \frac{1}{6}, B_{2m+4} = \frac{1}{360} (m = 2)$ . 于是, 如特取  $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{240} (\frac{\Delta x^2}{\Delta t})^2 - \frac{1}{12} \geq 0$ , 则截断误差可达  $O((\Delta t)^3 + (\Delta t)^2 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^6)$ , 此时稳定性要求  $r \leq \frac{1}{\sqrt{20}}$ .

在特殊情况下, 当  $\alpha = \frac{1}{12}, \beta = 0$  时格式(9)变为一个两层隐式差分格式

$$\frac{m}{12} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{6-m}{6} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{m}{12} \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\Delta t} = (-1)^{m+1} \left\{ \frac{\delta_x^{2m} u_j^{n+1}}{2(\Delta x)^{2m}} + \frac{\delta_x^{2m} u_j^n}{2(\Delta x)^{2m}} \right\}. \quad (11)$$

下述两个特例. (1) 当  $m=1$  时, 即对抛物型方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , 格式(9) 是文[4]中的高精度双参数格式. 如特取  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$  及  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$  便得文[5]中的 6 点格式与 9 点格式;  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  便得文[6]中格式.

(2) 当  $m=2$  时, 即得四阶抛物型方程  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$  的高精度双参数格式. 这是一个新的三层高精度双参数格式. 如特取  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$  得两层 10 点隐格式, 此即文[1]中给出的  $\theta = \frac{1}{6}$  的格式; 如特取  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  便得文[7]中格式. 此外, 也可取  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$  等等, 此不一一列举.

### 3 稳定性分析

引理<sup>[8]</sup> 即 Miller 准则. 设  $A > 0$ , 实系数二次方程  $A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$  (12)  
的两根按模小于或等于 1 的充要条件为  $A - C \geq 0$ ,  $A + B + C \geq 0$ , 且  $A - B + C \geq 0$ . 现用 Fourier 方法<sup>[5]</sup> 分析差分格式(11)的稳定性. 首先我们有  $e^{-i\eta} \delta_x^{2m} e^{i\eta\alpha} = (-4\sin^2 \frac{\alpha}{2})^m = (-1)^m (4s^2)^m$  ( $|\alpha| < \pi$ ), 其中  $s = \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ . 按文[5]中理论, 差分格式(9)的传播矩阵为

$$G(j, \Delta t) = \begin{bmatrix} -\frac{B}{A} & -\frac{C}{A} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

其特征方程为形如方程(12)的实系数二次方程, 其中  $A = (\alpha + \frac{1}{2})(1 - \frac{m}{3}s^2) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \beta)r(4s^2)^m$ ,  $B = -2\alpha(1 - \frac{m}{3}s^2) + (\frac{1}{2} - \beta)r(4s^2)^m$ ,  $C = (\alpha - \frac{1}{2})(1 - \frac{m}{3}s^2) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha + \beta)r(4s^2)^m$ . 显然, 对任意  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $r > 0$  当  $m \leq 3$  时, 有  $A > 0$ ,  $A - C = (1 - \frac{m}{3}s^2) + \alpha(4s^2)^m \geq 0$ ,  $A + B + C = r(4s^2)^m \geq 0$ ,  $A - B + C = 4\alpha(1 - \frac{m}{3}s^2) + 4\beta r(4s^2)^m \geq 0$ . 故引理成立. 由引理知 Von Neumann 条件成立. 因此格式(9) 至少是在 Forsythe Wasow 意义下为绝对稳定的<sup>[9]</sup>. 综上所述便得.

定理 当  $m=1, 2, 3$  时, 对任何非负参数  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ , 高阶抛物型方程周期初值问题(1)的格式(9) 至少在 Forsythe Wasow 意义下绝对稳定. 特别地, 两层格式(11) 是 Richtmyer 意义下绝对稳定的.

### 4 数值例子

解高阶抛物型方程周期初值问题

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, & -\infty < x < \infty, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= \sin x, & -\infty < x < \infty, \\ u(x + 2\pi, t) &= u(x, t), & -\infty < x < \infty, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其精确解为

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x. \quad (14)$$

当  $m=1, 2, 3, 4$  时, 利用格式(9) (取  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ;  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$  及  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$ ) 与格式(2) (当  $\alpha = \frac{1}{2}$  时, 即 G-N 格式) 进行求解. 对于网格函数  $u_1^n, \dots, u_J^n$ , 有  $u_0^n = u_J^n$ , 并作周期延拓. 初始条件按直接转移法获得.

取  $\Delta x = \frac{2\pi}{64} = \frac{\pi}{32}$ ,  $r = 2$ ,  $\Delta t = r(\Delta x)^{2m}$  ( $m=1, 2, 3, 4$ ), 进行计算到  $n=500$ . 定义误差  $E_j^n = u(x_j, t_n) - u_j^n$ ,

列出数值误差比较表如表 1 所示(表中  $r = 2$ ). 数值结果表明, 本文所构造的格式比 G-N 格式精度高  $10^{-2} \sim 10^{-4}$  阶. 数值结果与理论分析相符合. 值得注意数值结果还表明, 本文构造的格式(9)对  $m = 4$  仍适用, 其精度仍高于 G-N 格式  $10^{-3}$  阶.

表 1 G-N 格式与格式(9)( $\alpha, \beta$ ) 数值误差比较表

$m$	格式	$x$			
		$5\pi/32$	$22\pi/32$	$39/32$	$56\pi/32$
1	G-N	$-2.295\ 031\times 10^{-7}$	$-4.048\ 074\times 10^{-7}$	$3.088\ 593\times 10^{-7}$	$3.442\ 604\times 10^{-7}$
	格式(9)(0, 0)	$1.466\ 461\times 10^{-7}$	$2.586\ 607\times 10^{-7}$	$-1.973\ 525\times 10^{-7}$	$-2.199\ 728\times 10^{-7}$
	格式(9)(1/2, 0)	$9.055\ 354\times 10^{-9}$	$1.597\ 222\times 10^{-8}$	$-1.218\ 646\times 10^{-8}$	$-1.358\ 326\times 10^{-8}$
	格式(9)(1, 1/4)	$3.698\ 292\times 10^{-8}$	$6.523\ 203\times 10^{-8}$	$-4.977\ 062\times 10^{-8}$	$-5.547\ 528\times 10^{-8}$
2	G-N	$-6.406\ 310\times 10^{-5}$	$-1.129\ 972\times 10^{-4}$	$8.621\ 443\times 10^{-5}$	$9.609\ 623\times 10^{-5}$
	格式(9)(0, 0)	$-5.046\ 450\times 10^{-9}$	$-8.901\ 146\times 10^{-9}$	$6.791\ 437\times 10^{-9}$	$7.569\ 845\times 10^{-9}$
	格式(9)(1/2, 0)	$5.045\ 871\times 10^{-9}$	$-8.900\ 16\times 10^{-9}$	$6.790\ 544\times 10^{-9}$	$7.568\ 877\times 10^{-9}$
	格式(9)(1, 1/4)	$-4.687\ 274\times 10^{-9}$	$-8.267\ 771\times 10^{-9}$	$6.308\ 120\times 10^{-9}$	$7.031\ 103\times 10^{-9}$
3	C2N	$-1.014\ 960\times 10^{-6}$	$-1.790\ 230\times 10^{-6}$	$1.365\ 907\times 10^{-6}$	$1.522\ 466\times 10^{-6}$
	格式(9)(0, 0)	$3.268\ 249\times 10^{-10}$	$5.760\ 111\times 10^{-10}$	$-4.395\ 045\times 10^{-10}$	$-4.902\ 051\times 10^{-10}$
	格式(9)(1/2, 0)	$3.266\ 421\times 10^{-10}$	$5.761\ 699\times 10^{-10}$	$-4.397\ 427\times 10^{-10}$	$-4.900\ 631\times 10^{-10}$
	格式(9)(1, 1/4)	$3.254\ 583\times 10^{-11}$	$5.748\ 567\times 10^{-10}$	$-4.378\ 027\times 10^{-10}$	$-4.878\ 906\times 10^{-10}$
4	C2N	$-1.304\ 903\times 10^{-8}$	$-2.301\ 703\times 10^{-8}$	$1.756\ 194\times 10^{-8}$	$1.957\ 371\times 10^{-8}$
	格式(9)(0, 0)	$9.603\ 041\times 10^{-12}$	$1.528\ 444\times 10^{-11}$	$-1.275\ 802\times 10^{-11}$	$-1.224\ 298\times 10^{-11}$
	格式(9)(1/2, 0)	$1.006\ 589\times 10^{-11}$	$1.633\ 349\times 10^{-11}$	$-1.353\ 095\times 10^{-11}$	$-1.215\ 617\times 10^{-11}$
	格式(9)(1, 1/4)	$8.470\ 613\times 10^{-12}$	$1.383\ 749\times 10^{-11}$	$-1.363\ 509\times 10^{-11}$	$-1.643\ 907\times 10^{-11}$

参 考 文 献

1 K 著. 抛物型方程的网格积分法[ M]. 袁兆鼎译1 北京: 科学出版社, 1963. 143~ 152

2 曾文平1 高阶抛物型方程的具有高稳定性的显式与半显式差分格式[ J]1 应用数学学报, 1996, 19(4): 631~ 634

3 曾文平1 高阶抛物型方程恒稳的显式差分格式[ J]1 华侨大学学报(自然科学版), 1998, 19(2): 122~ 127

4 陈传淡, 林 群1 解抛物型方程的一族绝对稳定的差分格式[ J]1 厦门大学学报(自然科学版), 1983, 22( 3): 275~ 280

5 Richtmyer R D, Morton K W. Difference method for initial value problems[ M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1967. 38~ 167

6 周顺兴1 解抛物型偏微分方程的高精度差分格式[ J]1 计算数学, 1982, 4( 2): 204~ 213

7 曾文平1 四阶抛物型方程两类新的恒稳差分格式[ J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1997, 18( 4): 334~ 340

8 Miller J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis[ J]. J Inst Math Apps, 1971, 8: 394~ 406

9 矢岛信男, 野术达夫1 发展方程N 数值解析[ M]1 东京: 岩波书店1 19731 57~ 78

A Family of Implicit Difference Schemes for Solving  
the Parabolic Equation of Higher Order

Zeng Wenping

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

**Abstract** For solving the parabolic equation of higher order  $\frac{5u}{5t} = (-1)^{m+1} \frac{5^{2m}u}{5x^{2m}}$  ( where  $m$  is a positive integer), a family of three-layered implicit difference schemes containing biparameters are constructed. In a special case, a two-layer scheme is obtained when parameter  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = 0$ . The order of the truncation error of all these schemes is  $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^4)$ . These schemes are proved to be absolutely stable for arbitrarily chosen nonnegative parameter  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$  when  $m = 1, 2, 3$ . As shown by numerical examples, these schemes are effective and the theoretical analysis is correct.

**Keywords** parabolic equation of higher order, implicit difference scheme, stability