第 26 卷　第 2 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 26　No. 2
2005 年 4 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2005

文章编号　1000-5013(2005)02-0222-03

完全图 K_n 的 $\{P_4, S_4, C_4\}$-分解

顾　成　扬

(淮阴师范学院数学系,江苏 淮安 223001)

摘要　讨论完全图 K_n 分解成 4 个顶点的路、星和圈的存在性. 给出完全图 K_n 存在 $\{C_4, S_4\}$, $\{P_4, C_4\}$, $\{P_4, S_4\}$, $\{P_4, S_4, C_4\}$-分解以及强制分解的充要条件.

关键词　完全图 K_n, 完全二部图 $K_{m,n}$, 路 P_k, 星 S_k, 圈 C_k

中图分类号　O 157.5　　**文献标识码**　A

记 K_n 表示 n 个顶点的完全图, $K_{m,n}$ 表示完全二部图[1], 两个部分点集分别有 m 和 n 个顶点. P_k 表示 k 个顶点的路, C_k 表示 k 个顶点的圈, S_k 表示 k 个顶点的星. 以下讨论的图均是无孤立点的简单图. 设 $A = \{F_1, F_2, \cdots, F_r\}$ 是一族简单图, B 是图 G 的一族边不相交的子图. 若 G 的每一条边恰在 B 的一个子图中出现, 任意 $H \in B$, 存在 $F \in A$, 使得 H 与 F 同构, 则称 B 为 G 的一个 A-分解. 进一步地, 若任意 $F \in A$, B 中至少有一个子图 H 与 F 同构, 则称 B 为 G 的一个 A-强制分解[2].

1　引理和记号

引理 1[3]　K_n 存在 P_4-分解的充要条件是 $n \equiv 0, 1 \pmod 3$, 且 $n \geq 4$.

引理 2[3]　K_n 存在 S_4-分解的充要条件是 $n \equiv 0, 1 \pmod 3$, 且 $v \geq 6$.

引理 3[4]　$K_{m,n}$ 存在 C_{2k}-分解的充要条件: (i) $mn \equiv 0 \pmod{2k}$; (ii) $m, n \equiv 0 \pmod 2$; (iii) $m, n \geq k$.

引理 4[5]　$K_{m,n}$ 存在 S_k-分解的充要条件: (i) $m \equiv 0 \pmod{(k-1)}$, 当 $n < k-1$; (ii) $n \equiv 0 \pmod{(k-1)}$, 当 $m < k-1$; (iii) $mn \equiv 0 \pmod{(k-1)}$, 当 $m \geq k-1$ 且 $n \geq k-1$.

设 $V(K_n) = \{1, 2, \cdots, n\}$. 用 $(1; 2, 3, 4)$ 表示顶点 1 分别与 2, 3, 4 相连所得的星 S_4; 用 $(1, 2, 3, 4)$ 表示顶点 1, 2 相连 2, 3 相连 3, 4 相连 4, 1 所得圈 C_4; 用 $(1\text{-}2\text{-}3\text{-}4)$ 表示顶点 1 与 2 相连, 2 与 3 相连 3, 3 与 4 相连所得路 P_4 (图 1, 2, 3).

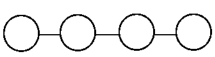

图 1　P_4 图

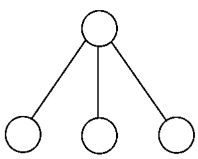

图 2　S_4 图

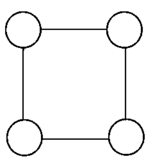

图 3　C_4 图

2　K_n 的 $\{S_4, C_4\}$-分解

定理 1　K_n 存在 $\{C_4, S_4\}$-强制分解的充要条件是 $n \geq 7$.

证明　必要性的证明通过简单的计算可得. 下面证明充分性.

(A) 当 $n = 7, 8, 9, 10, 11$ 时, K_n 的 $\{C_4, S_4\}$-强制分解. (1) K_7 存在 $\{C_4, S_4\}$-强制分解. C_4 和 S_4 分别为 $(1,2,5,4)$, $(1,5,6,7)$, $(1,3,2,6)$; $(3;5,6,7)$, $(7;2,4,5)$, $(4;2,3,6)$. (2) K_8 存在 $\{C_4, S_4\}$-强制分解. 分别为 $(1,3,2,4)$, $(5,7,6,8)$, $(1,2,5,6)$, $(3,4,7,8)$; $(1;5,7,8)$, $(2;6,7,8)$, $(3;5,6,7)$, $(4;5,6,8)$. (3) K_9 存在 $\{C_4, S_4\}$-强制分解. 即 $(1,2,6,5)$, $(2,3,5,4)$, $(1,3,4,6)$; $(1;4,8,9)$, $(2;5,8,9)$, $(3;6,8,9)$, $(7;1,2,3)$, $(7;5,6,8)$, $(8;5,6,9)$, $(9;5,6,7)$, $(4;7,8,9)$. (4) K_{10} 存在 $\{C_4, S_4\}$-强制分

收稿日期　2003-11-09

作者简介　顾成扬(1964-), 男, 副教授, 主要从事组合设计和图分解的研究. E-mail: gcy1964@sina.com

基金项目　江苏省高校自然科学基金资助项目(03KJB110012)

解. 即(1,2,6,5), (2,3,5,4), (1,3,4,6); (1;4,8,9), (2;5,8,9), (3;6,8,9), (7;1,2,3), (7;5,6,8), (8;5,6,9), (9;5,6,7), (4;7,8,9), (10;1,2,3), (10;4,5,6), (10;7,8,9). (5) K_{11}存在$\{C_4, S_4\}$-强制分解. 即(1,2,5,4), (1,5,6,7), (1,3,2,6), (8,9,10,11); (3;5,6,7), (7;2,4,5), (4;2,3,6), (10;6,7,8), (11;6,7,9), (8;4,6,7), (9;5,6,7), (4;9,10,11), (5;8,10,11), (8;1,2,3), (9;1,2,3), (10;1,2,3), (11;1,2,3).

(B) 当 $n = 6t + s(t \geq 1, s = 6,7,8,9,10,11)$时, K_n 存在$\{C_4, S_4\}$-强制分解. 当 $n = 6t + 6$ 时, 由引理 2 知 K_{6t}存在 S_4-分解. K_6 存在 S_4-分解. 又由引理 3 知 $K_{6t,6}$存在 C_4-分解. 因此, K_n 存在$\{C_4, S_4\}$-强制分解. 当 $n = 6t + p(p = 7,8,9,10,11)$时, 由引理 2 知 K_{6t}存在 S_4-分解. K_p 存在$\{C_4, S_4\}$-强制分解. 又由引理 4 知 $K_{6t,p}$存在 S_4-分解, 因此 K_n 存在$\{C_4, S_4\}$-强制分解.

推论 1　K_n 存在$\{C_4, S_4\}$-分解的充要条件是 $n \geq 6$.

证明　由引理 2 及定理 1 即得.

3　K_n的$\{P_4, C_4\}$-分解[6]

定理 2　K_n 存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解的充要条件是 $n \geq 5$ $(n \neq 6)$.

证明　必要性的证明, 通过简单的计算可得. 下面证明充分性. (A) 当 $n = 5,6,7,8$ 时, K_n 的$\{P_4, C_4\}$-强制分解. (1) K_5 存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解. 即(2,3,4,5); (2-4-1-5), (2-1-3-5); (2) K_6 不存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解. 设 K_6 可以分解成 x 个 P_4 和 y 个 C_4, 则 $3x + 4y = 15$, 由此可得 $x = 1, y = 3$. 由于 P_4 只有一个, 故在构成 K_6 时, 只有 2 个顶点的度为奇数这与 K_6 中每个顶点的度均为 5 矛盾. (3) K_7 存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解. 即(1,3,4,6), (2,4,5,7), (3,5,6,7); (4-7-1-5), (4-1-2-6), (5-2-3-6). (4) K_8 存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解. 即(1,2,3,4), (5,6,7,8), (1,3,4,8), (2,6,3,7); (1-3-5-7), (2-4-6-8), (3-8-2-5), (4-7-1-6). (B) 当 $n = 9,10,11,12$ 时, K_n 存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解. K_4, $K_{2,3}$均可以分解成 2 个 P_4. $K_{4,5}$可以分解成 2 个 C_4 和 2 个 $K_{2,3}$. $K_{4,7}$可以分解成 2 个 C_4 和 1 个 $K_{4,5}$. 由引理 3 知 $K_{4,6}$, $K_{4,8}$均存在 C_4 分解. K_9 可以分解成 K_4, K_5, $K_{4,5}$. K_{10}可以分解成 K_4, K_6, $K_{4,6}$. K_{11}可以分解成 K_4, K_7, $K_{4,7}$. K_{12}可以分解成 K_4, K_8, $K_{4,8}$. (C) 当 $n = 4t + s(t > 1, s = 5,6,7,8)$时, K_n 存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解. K_n 可以分解成 K_4, K_s, $K_{4,4}$, $K_{4,s}$. 由引理 1 知 K_4, K_6 存在 P_4-分解; 由引理 3 知 $K_{4,4}$, $K_{4,6}$, $K_{4,8}$存在 C_4-分解; 由(B)知 $K_{4,5}$, $K_{4,7}$存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解; 再由(A)知 $K_s(s = 5,7,8)$存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解. 因此, K_n 存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解. 定理 2 得证.

推论 2　K_n 存在$\{P_4, C_4\}$-分解的充要条件是 $n \geq 4$.

证明　由引理 1 及定理 2 即得.

4　K_n的$\{P_4, S_4\}$-分解

定理 3　K_n 存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解的充要条件是 $n \equiv 0,1 \pmod 3$ 且 $n \geq 6$.

证明　必要性的证明, 通过简单的计算可得. 下面证明充分性. (A) 当 $n = 6,7,9,10$ 时, K_n 的$\{P_4, S_4\}$-强制分解. (1) K_6 存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 即(1-2-3-4), (4-5-6-1), (3-1-4-2); (5;1,2,3), (6;2,3,4). (2) K_7 存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 即(1-2-3-4), (4-5-6-1), (3-1-4-2); (5;1,2,3), (6;2,3,4), (7;1,2,3), (7;4,5,6). (3) K_9 存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 即(1-2-3-4), (2-4-1-3), (5-6-7-8), (6-8-5-7), (1-5-9-4); (9;1,2,3), $(i;6,7,8)$ $(i = 1,2,3,4,9)$. (4) K_{10}存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 即(1-2-3-4), (2-4-1-3), (5-6-7-8), (6-8-5-7), (1-5-9-4); (9;1,2,3), $(i;6,7,8)$ $(i = 1,2,3,4,9)$, $(10;j,j+1,j+2)$ $(j = 1,4,7)$. (B) 当 $n = 3t + 6$ 时$(t > 1)$, 由引理 1 知 K_{3t}存在 P_4-分解. K_6 存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解, 又由引理 4 知 $K_{3t,6}$存在 S_4-分解, 因此 K_n 存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 当 $n = 3t + 7(t > 1)$时, 由引理 1 知 K_{3t}存在 P_4-分解. K_7 存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 又由引理 4 知 $K_{3t,7}$存在 S_4-分解, 因此 K_n 存在$\{C_4, S_4\}$-强制分解. 定理 3 得证.

推论 3　K_n 存在$\{P_4, S_4\}$-分解的充要条件是是 $n \equiv 0,1 \pmod 3$ 且 $n \geq 4$.

证明　由引理 1 即得.

5 K_n的$\{P_4, S_4, C_4\}$-分解

定理4 K_n存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解的充要条件是$n \geq 7$.

证明 必要性的证明,通过简单的计算可得. 下面证明充分性. (A) 当$n=7,8,9$时, K_n的$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. (1) K_7存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. 即(4-1-5-7),(2-4-6-3); (7;2,3,4); (1,2,6,7),(2,3,4,5),(1,3,5,6); (2) K_8存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. K_8可以分解成$K_5 \cup K_3 \cup K_{3,5}$ ($V(K_5)=\{1,2,3,4,5\}$, $V(K_3)=\{6,7,8\}$). K_5存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解, $K_3 \cup K_{3,5}$存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 即(5-8-6-7),(6-5-7-8); (i;6,7,8) ($i=1,2,3,4$). (3) K_9存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. K_9可以分解成$K_6 \cup K_3 \cup K_{3,6}$ ($V(K_3)=\{1,2,3\}$, $V(K_6)=\{4,5,6,7,8,9\}$). K_6存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解, $K_3 \cup K_{3,6}$存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 即

(3-2-1-4); (1;7,8,9),(1;3,5,6) (i;4,5,6),(i;7,8,9) ($i=2,3$).

(B) 当$n=10,11,12$时, K_n的$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. (1) K_{10}存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. 即K_{10}可以分解成$K_9 \cup K_{1,9}$, K_9存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. 由引理4知$K_{1,9}$存在S_4-分解. 故K_{10}存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. (2) K_{11}存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. K_{11}可以分解成$K_5 \cup K_6 \cup K_{5,6}$. K_5存在$\{P_4, C_4\}$-强制分解. K_6存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 由引理4知$K_{5,6}$存在S_4-分解. 故K_{11}存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. (3) K_{12}存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. K_{12}可以分解成$K_6 \cup K_6 \cup K_{6,6}$. K_6存在$\{P_4, S_4\}$-强制分解. 由引理3知$K_{6,6}$存在C_4-分解. 故K_{12}存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. (C) 当$n=3t+s$时($t>1$, $s=7,8,9$), K_n存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. K_n可以分解成$K_{3t} \cup K_s \cup K_{3t,s}$. 由引理1知$K_{3t}$存在$P_4$-分解, K_s存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解, 由引理4知$K_{3t,s}$存在S_4-分解. 因此, K_n存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-强制分解. 定理4得证.

推论4 K_n存在$\{P_4, S_4, C_4\}$-分解的充要条件是$n \geq 4$.

证明 由引理1及定理4即得.

参 考 文 献

1 Ushio K. G-designs and related designs [J]. Discrete. Math., 1993, 116:299～311

2 Bondy J A, Murty, U S R. Graph theory with applications [M]. London: Macmillan, 1976. 1～111

3 Bermond J C. Schonheim J. G-decompositions of K_n, where G has four vertices or less[J]. Discrete. Math., 1977, 19:113～120

4 Sotteau D. Decomposition of $K_{m,n}$ ($K_{m,n}$) into cycles(circuits) of length $2k$ [J]. Combinatorial Theory (B), 1981, 30: 75～81

5 Yamamoto S, Ikeda H, Shigeeda S, et al. On claw-decomposition of complete graphs and complete bipartite graphs [J]. Hiroshima. Math. J., 1975, 5: 33～42

6 童 翔, 顾成扬. 关于完全图K_n的$\{P_4, C_4\}$-分解[J]. 吉林化工学院学报, 2003, 20(4):119～120

Decomposition of Complete Graph K_n into $\{P_4, S_4, C_4\}$

Gu Chengyang

(Department of Mathematics, Huaiyin Teachers College, 223001, Huaian, China)

Abstract Regarding the decomposition of complete graph K_n into four apexes, the author discusses the existence of its path, star and circle; and gives necessary and sufficient conditions for complete graph K_n to have $\{C_4, S_4\}$, $\{P_4, C_4\}$, $\{P_4, S_4\}$ and $\{P_4, S_4, C_4\}$ decomposition and coercive decomposition.

Keywords complete graphs K_n, complete bipartite graphs $K_{m,n}$, path P_k, star S_k, cycle C_k