第 26 卷 第 2 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 26 No. 2
2005 年 4 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 2005

文章编号 1000-5013(2005)02-0220-02

Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度估计

陈应生 陈尔明

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 通过构造 Sierpinski 地毯的一个覆盖, 得出其 Hausdorff 测度的上限估计值.

关键词 Sierpinski 地毯, Hausdorff 测度, Hausdorff 维数, 覆盖

中图分类号 O 174.12 文献标识码 A

分形集的 Hausdorff 维数和测度的计算是十分困难的, 即使是结构较为正规的分形集, 目前也尚无有效方法. 文 [1] 对 Sierpinski 提出的另一自相似集-Sierpinski 地毯(Carpet) 进行了 Hausdorff 测度的估计, $H^s(S) \leqslant 1.473\ 1$. 本文改进了这个估计, 得出 $H^s(S) \leqslant 1.409\ 736$.

1 基本概念

Sierpinski 地毯的构造是在平面 $\mathbf{R}^2$ 上, 取单位正方形 S_0, 每边三等分, 用与边平行的线段连接分点, 得到 9 个边长为 $\frac{1}{3}$ 的正方形. 去掉中间一个的内部, 得到由 8 个正方形组成的集合, 记作 S_1 对 S_1 中每一个正方形重复上述过程, 得到集合 S_2. 上述过程无限进行下去, 得到集列 $S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$, 如图 1 所示. 该非空集合 $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$, 称为由 S_0 生成的 Sierpinski 地毯. S_n 由 8^n 个边长为 $\frac{1}{3^n}$ 的正方形构成, 它们称为 S_n 的 n 阶基本正方形, 记为 I_{3^n}. 每个 I_{3^n} 可生成与 S 有相似比为 $\frac{1}{3^n}$ 的几何相似集合, 记作 $\frac{1}{3^n}$-S. 显然 $I_{3^n} \cap S = \frac{1}{3^n}$-$S$. 易知 S 的 Hausdorff 维数为 [1] $s = \dim_H(S) = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.892\ 789\ 261$. S 的 Hausdorff 测度可定义为 $H^s(S) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(S)$, $H^s_\delta(S) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,\ S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,\ |U_i| \leqslant \delta,\ \delta > 0\}$.

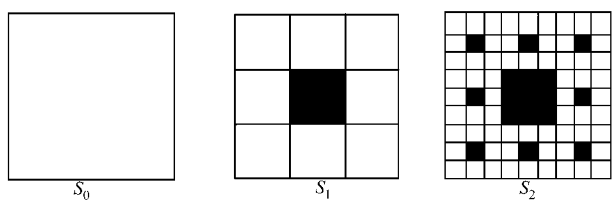

图 1 Sierpinski 地毯的构造

引理 **1** [1] $H^s(\frac{1}{3^n} - S) = \frac{1}{8^n} H^s(S)$.

引理 **2** [1] $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} S^{(i)}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} H^s(S^{(i)})$. $S^{(i)} \subset S$.

2 定理及证明

定理 $H^s(S) \leqslant 1.409\ 733\ 6$. 这是本文所得的结果.

证明 类似文献 [2], 易证对于 Sierpinski 地毯 S 的任意 δ-覆盖 $\alpha = \{U_i, i \geqslant 0\}$, 有 $H^s(S) = H^s_\delta(S) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$. 如图 2 所示, 以 S_0 的 4 边上截取长度为 $\frac{6}{27}$ 的 8 条线段, 记截点为 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1,$

收稿日期 2004-05-25

作者简介 陈应生(1976-), 男, 助教, 主要从事动力系统与分形几何的研究. E-mail: cys19760828@163.com

D_2. 对 S_0 的左上角上的一阶基本正方形如图 3, 在线段 EF 上截取长度等于$\frac{1}{27}$的线段 EE_1. 在线段 GH 上, 截取长度等于$\frac{1}{27}$的线段 GE_2. 在其它 3 个一阶基本正方形上, 同样取点 $F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2$. 连接

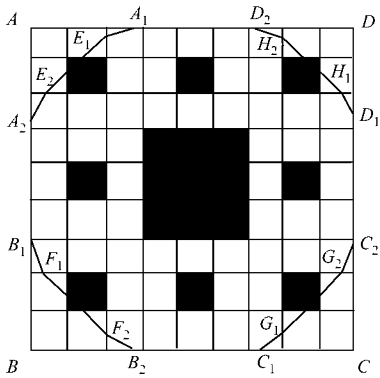

图 2　S_2 示意图

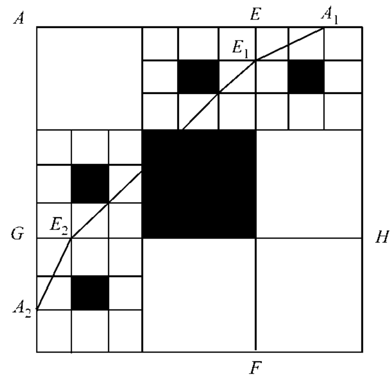

图 3　S 左上角$\frac{1}{3}S$ 图

这 16 个点 A_1, E_1, E_2, A_2, B_1, F_1, F_2, B_2, C_1, G_1, G_2, C_2, D_1, H_1, H_2, D_2, 得到 16 边形 $A_1E_1E_2A_2B_1F_1F_2B_2C_1G_1G_2C_2D_1H_1H_2D_2$. 记为 U. 通过计算可得 U 的直径为$\frac{\sqrt{850}}{27}$, 显然 $\delta=\{16$ 边形 U, 4 个五边形分别为 $AA_1E_1E_2A_2, BB_2F_2F_1B_1, CC_2G_2G_1C_1, DD_1H_1H_2D_2\}$是 S 的一个$\frac{\sqrt{850}}{27}$覆盖[3]. 对于每个 n 阶基本正方形I_{3^n}, 可用对角线分成两个等腰直角形, 称为基本三角形, 记为 J_{3^n}, 其腰边长为$\frac{1}{3^n}$. 五边形 $AA_1E_1E_2A_2$ 可用$\{1$ 个 I_{3^2}, 12 个 I_{3^3} 和 6 个 $J_{3^3}\}$覆盖[3]. 记 $\mathcal{J}_{3^3} = J_{3^3}\cap S$, $I_{3^n} = I_{3^n}\cap S$. 由 S 的构造可得 $\mathcal{J}_{3^3} = \{3$ 个 I_{3^4}, 2×3 个 I_{3^5}, $2^2\times 3$ 个 I_{3^6}, …, $2^{n-2}\times 3$ 个 $I_{3^{n+2}}$, …$\}\cap S = \{3$ 个 I_{3^4}, 2×3 个 I_{3^5}, $2^2\times 3$ 个 I_{3^6}, …, $2^{n-2}\times 3$ 个 $I_{3^{n+2}}$, …$\}$. 于是由引理 1 和引理 2, 有 $H^s(\mathcal{J}_{3^3}) \leqslant \sum_{i=2}^{\infty} 2^{i-2}\times 3H^s(I_{3^{i+2}}) = \sum_{i=2}^{\infty} 2^{i-2}\times 3H^s(\frac{1}{3^{i+2}}S) = \sum_{i=2}^{\infty}\frac{2^{i-2}\times 3}{8^{i+2}}H^s(S) = \frac{4}{8^4}H^s(S)$, $\delta=\{U\cap S$, 4 个 I_{3^2}, 48 个 I_{3^3}, 96 个 $\mathcal{J}_{3^3}\}$. 那么, δ 是 S 的一个覆盖. 由引理 2, 有

$$H^s(S) \leqslant (\frac{\sqrt{850}}{27})^s + 4H^s(I_{3^2}) + 48H^s(I_{3^3}) + 96H^s(\mathcal{J}_{3^3}) \leqslant (\frac{\sqrt{850}}{27})^s + (\frac{4}{8^2} + \frac{48}{8^3} + \frac{96}{8^4})H^s(S).$$

于是, $H^s(S) \leqslant \frac{128}{105}\times(\frac{\sqrt{850}}{27})^s \approx 1.409\,733\,6$. 定理证毕.

参　考　文　献

1　陈秀庆. Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度的上限估计[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 1998, 21(2): 16~ 18

2　周作领. Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学(A), 1997, 27(6): 491~ 496

3　Falconer 著. 分形几何的数学基础及其应用[M]. 曾文曲译. 沈阳: 东北大学出版社, 2001. 9~ 10

Estimating the Hausdorff Measure of a Class of Sierpinski Carpet

Chen Yingsheng　　Chen Erming

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract　For a special type of Sierpcnski carpet, the authors obtain the estimate value of the upper limit of its Hausdorff measure by constructing a covering of Sierpinski carpet.

Keywords　Sierpinski capet, Hausdorff measure, Hausdorff dimension, covering