第 26 卷 第 2 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 26 No. 2
2005 年 4 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 2005

文章编号 1000-5013(2005)02-0213-04

随机贴现模型资产市场定价方法

陈 金 龙

(华侨大学工商管理学院, 福建 泉州 362021)

摘要 将传统的贴现现金流(DCF)模型推广到随机贴现模型, 并介绍该模型的理论基础. 在完全市场条件下, 探讨确定随机贴现因子的方法. 利用所得到的随机贴现因子, 求解欧式期权的定价公式. 在非完全市场条件下, 利用效用函数确定随机贴现因子, 获得给定资产的无套利定价.

关键词 随机贴现模型, 资产定价, 完全市场, 非完全市场

中图分类号 O 175.3; F 830.9 文献标识码 A

资产定价的最基本方法是采用贴现现金流(DCF)模型. DCF 模型通过用适当的贴现率 r_t, 贴现与一项资产相关的未来所有现金流 C_t, 确定该资产的现值. 运用 DCF 模型的关键在于两个基本要点. (1) 能否合理估计资产未来产生的所有现金流, 包括直接现金流和间接现金流. (2) 选择恰当的贴现率. 资产未来的现金流的估计取决于待估资产的类型, 目前已有多种估计方法. 一般来说, 直接现金流量的估计和处理较为容易, 但间接现金流量的估计和处理则较为困难. 因此传统的 DCF 模型往往忽略这一部分, 由此引起资产价值的低估而受到大量责疑. 至于模型选择的贴现率, 则与资产定价的目的有关. 对不同的定价目的, 采用的贴现率也不同. DCF 虽是一种基本的资产定价方法, 但直接利用它来确定诸如期权等或有权益的价值较为困难. 1973 年默顿等人提出无套利的概念, 并在无套利原则下, 利用市场中其它已知价格的资产来确定期权的价值. 这就是所谓的套利定价方法. 著名的 Black-Scholes 期权定价公式, 可以通过套利定价方法得到. 套利定价与 DCF 定价的出发点不同, 应用的环境也有差异, 它们是两种不同的定价方法. 但就确定资产的公平市场价值而言, 通过适当推广 DCF 方法, 可以将这两种方法联系起来. 推广 DCF 定价的方法是用一个称为随机贴现因子 D_t 代替 DCF 模型中的确定性贴现因子. 当资产未来各期的随机现金流为 $C_1, C_2, \cdots, C_T$, 该资产在 0 时刻的价值为

$$PV = \sum_{t=1}^{T} E[D_t C_t]. \tag{1}$$

这种资产定价模型称为随机贴现模型. 当 D_t 是确定性的折现因子时, 式(1)即为传统的 DCF 模型. 当 D_t 是一个随机变量时, 在一定假设下, 如无套利、市场完全性等, 可以通过适当选择 D_t, 使式(1)得到的定价等价于无套利定价.

1 模型理论基础

假设(Ω, F, P)是一个概率空间, $F=\{F_t, t\in\Gamma\}$表示信息结构. 在离散时间情形, $\Gamma=\{0, 1, 2\cdots, T\}$, 在连续时间情形, $\Gamma=[0, T]$. F_t 表示在时刻 t 所能获得的全部信息, 对任意 $s, t\in\Gamma$, $s<t$, 有 $F_s\subseteq F_t$. 假定 $F_0=\{\varnothing, \Omega\}$, F_T 为 Ω 的所有子集构成的集合, 即在 T 时刻投资者完全知道真实的状态. $f_T(w)$ 为定义在(Ω, P)上的随机变量, 它表示资产在 T 时刻的各种状态下的现金流(损益). 所有(Ω, P)上的取值有限的随机变量组成的集合记为X. 现定义一个定价函数为$L: X\rightarrow R_+$, 即任意$f_T(w)\in X$, 存在唯一 $f_0\in R_+$, 使得 $L(f_T(w))=f_0$. 为简化起见, 下面假设 $X\subseteq L^2(P)$.

收稿日期 2004-09-14

作者简介 陈金龙(1965-), 男, 副教授, 主要从事金融工程与金融管理研究. E-mail: jinlong@hqu.edu.cn

基金项目 华侨大学科研基金资助项目(04BS103)

定义 1 若对时刻 T 的任意现金流 $f_T(w)\in X$, 及其在 $t=0$ 的价格 $f_0\in R_+$, 有 $(-f_0, f_T(w))\geqslant 0$, 且 $-f_0\geqslant 0$ 或 $P(f_T(w))>0)>0$, 则称市场存在套利机会.

从直观上看, 一个套利机会就是现在不需投入就可以在未来获得正的现金流. 一个价格系统如果存在套利机会, 市场就不可能是均衡的. 因为每一个非满足的投资者都会利用这种套利机会, 从而市场不可能是出清的. 下面我们不加证明给出一个市场无套利, 与严格正线性定价函数存在性之间关系的定理. 这个定理证明很简单, 只须利用定义 1 和分离超平面定理[1]就可以得出.

定理 1 市场无套利当且仅当存在一个定义在 X 上的严格正线性定价函数. 定价函数 $L: X\to R_+$ 是严格正的线性函数, 是指对任意 $f_T(w)$, $g_T(w)\in X$ 都有 $L(f_T(w)+g_T(w))=L(f_T(w))+L(g_T(w))$. 而且, 若 $f_T(w)\geqslant 0$, $P(f_T(w)>0)>0$, 则有 $L(f_T(w))>0$. 上面定理为我们判断市场是否存在套利机会提供了一个简单的判断标准. 只要我们能够找到一个严格正的线性定价函数, 就可以确定市场是无套利的. 那末, 如何寻找定价函数或者定价函数的具体表达式, 可通过 Riesz 表示定理来解决.

定理 2 此即 Riesz 表示定理[1]. 若函数 $L(.): L^2(P)\to P$ 是一个连续线性函数, 则存在唯一 $\varphi(w)\in L^2(P)$, 使得 $L(f)=\int f\varphi\mathrm{d}P$.

由上面论述可以得出, T 时刻的不确定现金流, 可用定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的随机变量空间 $L^2(P)$ 表示. 当市场不存在套利时, 必存在一个严格正的线性定价函数 L, 使得对任意现金流 $f_T\in L^2(P)$, 在 $t=0$ 时刻的定价为 $L(f_T)=\int f_T\varphi_T\mathrm{d}P=E[f_T\varphi_T]$. 这里 φ_T 的称为"定价核"(Pricing Kernel), 也称为随机贴现因子(Stochastic Discount Factor). 下面先解释 φ_T 的涵义.

假设 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ 是离散状态空间, 对任意 $\omega_i\in\Omega$, 定义损益函数为

$$\delta_T(\omega-\omega_i)=\begin{cases}1, & \omega=\omega_i\\ 0, & \omega\neq\omega_i\end{cases},\qquad i=1,2,\ldots,n.$$

在 T 时刻具有这种损益的证券称为 Arrow 证券[2], 在 $t=0$ 的价格为 $\Psi(\omega_i)$, 即 $L(\delta_T(\omega-\omega_i))=\Psi_T(\omega_i)$, 此时称 $\Psi_T(\omega_i)$ 为状态价格. 对 T 时刻的任意损益函数 $f_T(\omega)$, 可以表示为上述 δ_T 函数的线性组合

$$f_T(\omega)=\sum_{z\in\Omega}f_T(z)\delta_T(\omega-z).$$

它在 $t=0$ 的价格为 $L(f_T(\omega))=L(\sum_{z\in\Omega}f_T(z)\delta_T(\omega-z))=\sum_{z\in\Omega}f_T(z)L(\delta_T(\omega-z))=\sum_{z\in\Omega}f_T(z)\Psi_T(z)$. 当状态空间 Ω 为连续时, 上面式子为 $L(f_T(\omega))=\int_{z\in\Omega}f_T\Psi_T\mathrm{d}z$. 再由 Riesz 表示定理, 有 $L(f_T(\omega))=(f_T, \varphi_T)$ $=\int_{z\in\Omega}f_T(z)\varphi_T(z)\mathrm{d}P(z)=\int_{z\in\Omega}f_T(z)\varphi_T(z)p_\omega(z)\mathrm{d}z=\int_{z\in\Omega}f_T(z)\Psi_T(z)\mathrm{d}z$. 所以有 $\Psi_T(z)=\varphi_T(z)p_\omega(z)$, 因此随机贴现因子 φ_T 可以表示为

$$\varphi_T(z)=\frac{\Psi_T(z)}{p_\omega(z)}.\tag{2}$$

当状态空间为离散时, $p_\omega(z)$ 为状态概率, 当状态空间为连续型时, $p_\omega(z)$ 为状态空间 (Ω, P) 上的状态概率密度. 将上面的单周期模型推广到多期模型时, $\Psi_t(\omega)$ 表示 t 时刻在状态 ω 下取值为 1, 其它状态取值为 0 的证券在 0 时刻的市场价值. 此时 t 时刻的随机贴现因子 φ_t 可以表示为

$$\varphi_t(z)=\frac{\Psi_t(z)}{p_\omega(z)}.\tag{3}$$

对于在时刻 t 的现金流为 $C_t(\omega)$ 的证券, 它在 0 时刻的市场价值为 $C_0=\sum_{t\in[0,T]}\sum_{\omega\in\Omega}\varphi_t(\omega)C_t(\omega)p_t(\omega)=\sum_{t\in[0,T]}E[\varphi_t C_t]$. 对于不付红利的证券 C, 它在 T 的现金流为 C_T, 则在 0 时刻的市场价值为 $C_0=E[\varphi_T C_T]$. 在任意 t 时刻的市场价值为

$$C_t=\frac{E[\varphi_T C_T\mid F_t]}{\varphi_t}.\tag{4}$$

由此看来, 随机贴现因子 $\varphi(z)$ 通过状态空间的基本概率密度与状态价格联系起来. 而且在一个特定的市场里, 随机贴现因子的存在与否取决于市场是否存在套利机会. 事实上, 根据随机贴现因子与等价鞅测度的一一对应关系[3]. 我们还可得出与资产定价第一定理平行的结论, 即市场无套利当且仅当存在随

机贴现因子[4]. 至于随机贴现因子是否唯一则取决于市场的完全性.

2 完全市场定价法

2.1 B-S期权定价模型

B-S 期权定价模型[5]，可采用复制定价法或鞅方法求得. 下面可用上述的随机贴现因子定价法，确定 B-S 期权定价公式. 这种资产定价法的关键问题是如何求出随机贴现因子. 我们假设对无风险证券 S_0 及风险资产 S 有

$$S_0(T) = S_0(t)e^{(T-t)r},$$
$$S_T = S_t e^{(X_T - X_t)}, \qquad t \in [0, T].$$

且 $X_T - X_t \sim N(u(T-t), \sigma^2(T-t))$，即 $X_T|_{X_t} \sim N(u(T-t)+X_t, \sigma^2(T-t))$. 对随机贴现因子 φ_t，由其性质有

$$\varphi_t S_0(t) = E_t[\varphi_T S_0(T)], \qquad \varphi_t S_t = E_t[\varphi_T S_T].$$

由 $S_0(T)$, S_T 的形式，我们可以推测随机贴现因子 φ_t 的形式为 $\varphi_t = \varphi_0 e^{at+bX_t}$. 将它代入上式解得 $a = \frac{1}{2\sigma^2}[u^2 - (r+\frac{\sigma^2}{2})^2]$, $b = \frac{1}{\sigma^2}(r - u - \frac{1}{\sigma^2})$. 代入 φ_t 表达式，得

$$\varphi_t = \varphi_0 \exp\{\frac{1}{2\sigma^2}[u^2 - (r+\frac{\sigma^2}{2})^2]t + \frac{1}{\sigma^2}(r - u - \frac{1}{\sigma^2})X_t\}.$$

对欧式看涨期权 $C_T = (S_T - K)^+$，有 $\varphi_t C_t = E_t(\varphi_T(S_T - K)^+)$. 将 φ_t 公式代入可得

$$\begin{aligned}C_t = {} & e^{a(T-t)}E_t[e^{b(X_T - X_t)}(S_t e^{X_T - X_t} - K)^+] = \\ & e^{a(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\,\sigma}\int_{\ln\frac{K}{S_t}}^{\infty} e^{bx}(S_t e^x - K)e^{-\frac{[x-u(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}}\mathrm{d}x = \\ & \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln(K/S_t)-u(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y-(b+1)\sigma\sqrt{T-t}]}\mathrm{d}y - e^{-r(T-t)}\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln(K/S_t)-u(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}[y-b\sigma\sqrt{T-t}]}\mathrm{d}y = \\ & S_t\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).\end{aligned}$$

这就是完全市场下欧式期权的 B-S 定价公式.

2.2 二叉树期权定价模型

二叉数模型是离散时间期权定价常用方法. 该方法是 1979 年 Cox 等人提出的，所以也称 Cox-Ross-Rubinstein 模型，简称 CRR 模型[6]. 在该模型中，假设无风险债权价格过程为 $B_t = (1+r)^t$, $t = 0, 1, 2, \cdots, T$, r 为无风险利率. 股票价格过程为 $S_t = S_{t-1}\zeta_t$, $t = 1, 2, \cdots, T$. 这里 $\{\zeta_t, t = 1, 2, \cdots, T\}$ 是独立同分布随机变量，它的分布概率为 $P_r\{\zeta_t = u\} = p = 1 - P_r\{\zeta_t = d\}$. 这样在 t 时刻股票的价格可能为 $S_t = S_0 u^k d^{t-k}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, T$, k 为股票上升的次数，$t - k$ 为股票下降的次数. 为了保证给定的证券之间不存在套利机会，u, d, r 必须满足 $0 < d < 1 + r < u$. 下面我们采用随机贴现因子法来求解期权 $C_T = (S_T - K)^+$ 在 0 时刻的价值. 由随机贴现因子的性质有

$$\varphi_0 B_0 = E[\varphi_T B_T] \text{ 和 } \varphi_0 S_0 = E[\varphi_T B_T]. \tag{5}$$

由于 S_T 取值为 $\{S_T^k = S_0 u^k d^{T-k}, k = 0, 1, 2, \cdots, T\}$，假设 φ_T 的取值为 φ_T^k, ($k = 0, 1, 2, \cdots, T$)，通过观察，不难发现 φ_T 为

$$\varphi_T^k = \frac{\varphi_0}{(1+r)^T}\frac{q_u^k(1-q_u)^{T-k}}{p^k(1-p)^{T-k}}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, T; \qquad q_u = \frac{(1+r)-d}{u-d}.$$

容易验证 φ_T^k 满足式(5)，由市场的完全性知道 φ_T^k 是唯一的. 我们就可以利用它来计算期权 C_T 的价值 C_0，有

$$\begin{aligned}C_0 = {} & \frac{1}{\varphi_0}E[\varphi_T C_T] = \frac{1}{\varphi_0}\sum_{k=0}^{T} C_T^k p^k(1-p)^{T-k}\frac{\varphi_0}{(1+r)^T}\frac{q_u^k(1-q_u)^{T-k}}{p^k(1-p)^{T-k}}C_T(k) = \\ & \frac{1}{(1+r)^T}\sum_{k=0}^{T} C_T^k q_u^k(1-q_u)^{T-k}C_T(k) = \frac{1}{(1+r)^T}E^q[C_T].\end{aligned}$$

上式 $C_T(k)$ 为股票 S 取值 $S_0u^kd^{T-k}$ 时, 期权 C_T 的值.

3 非完全市场定价法

在非完全市场里, 存在多个随机贴现因子. 因此资产的无套利定价不唯一, 在一般情况下, 只能得到一个无套利定价区间. 为了得到资产的唯一定价, 必须在无套利原则基础上增加其他定价标准. 一个常用的方法是在定价中结合投资者的风险偏好和财富水平, 采用效用定价方法. 从理论上我们可以证明, 在一定假设条件下, 投资者的每一个效用函数将对应于一个随机贴现因子. 下面我们将介绍单周期情形由效用函数确定状态价格-紧缩因子的方法.

效用函数 U 是投资者财富的函数. 从经济学角度看, 效用函数一般具有两个性质. (1) U 是投资者财富的增函数(财富越多越好). (2) U 具有边际效用递减性. 此外为了简化, 通常假设 U 是可导函数. 假设投资者在 $T=0$ 时刻拥有的财富为 ω_0, 采用最优投资策略, 在 $T=1$ 时刻的财富水平为 ω_1^*, 若 ω_1 为投资者以同样初始财富 ω_0, 采用任意策略在时刻 $T=1$ 所得的财富水平, 由最优性知对任意 θ, 有 $E[U(\theta\omega_1+(1-\theta)\omega_1^*)]\leqslant E[U(\omega_1^*)]$. 由于函数 $f(\theta)=E[U(\theta\omega_1+(1-\theta)\omega_1^*)]$ 在 $\theta=0$ 处取得最大值, 因此有 $E[(\omega_1-\omega_1^*)U'(\omega_1^*)]=0$. 定义 $\varphi_1=\dfrac{U'(\omega_1^*)\omega_0}{E[U'(\omega_1^*)\omega_1^*]}\varphi_0$, 则可验证对任意投资组合 ω, 有 $E[(\varphi_1\omega_1]=\varphi_0\omega_0$. 由贴现因子的性质, 一般有 $\varphi_0=1$, 即 $\varphi=\dfrac{U'(\omega_1^*)\omega_0}{E[U'(\omega_1^*)\omega_1^*]}$ 为随机贴现因子. 利用它, 可以计算各资产或其组合在0时刻的市场价值. 如对在时刻1产生随机现金流 C 的资产, 它在0时刻的市场价值为

$$P_c^0=E[\frac{U'(\omega_1^*)\omega_0}{E[U'(\omega_1^*)\omega_1^*]}C].$$

对连续情形, 仍有类似的结论. 因篇幅所限, 本文不予介绍, 可详见文献〔7〕.

参 考 文 献

1 李国平, 蹇 明. 算子函数论[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1997. 5~6, 33~34

2 Arrow K. The Role of securities in the optional allocation of Risk-Bearing[J]. Review of Economic Studies, 1964, (31): 91~96

3 杨云红. 高级金融理论[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2001. 61~62

4 Harrison M, Plska S. Martingales & stochastic integrals in the theory of stochastic trading[J]. Stochastic Processes & their Applications, 1981, (11): 215~260

5 Black F, Scholes M. The Pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, (81): 637~659

6 Cox J C, Ross S A, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach [J]. Financial Econom, 1979, (7): 229~263

7 陈金龙. 实物期权定价理论与方法研究[D]: [学位论文]. 天津: 天津大学管理学院, 2003. 75~78

Stochastic Discount Model-Based Assets Pricing Method

Chen Jinlong

(College of Business Administration, Huaqiao University, 362011, Quanzhou, China)

Abstract Starting from a presentation of the theoretical basis of stochastic discount model which is extended from the traditional model of discount cash flow (DCF), the author inquires into assets pricing method in the market under different conditions. Under the condition of complete market, the method for determining stochastic discount factor (SDF) is explored and the pricing formula of European option is solved by using SDF so obtained. Under the condition of incomplete market, SDF is determined by using utility function; and the pricing without arbitrage of the given assets is obtained therefrom.

Keywords stochastic discount model, assets pricing, complete market, incomplete market