

文章编号 1000-5013(2005)02-0180-04

正交样条的多分辨率分析方法

林 福 泳

(华侨大学机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

摘要 构造正交样条函数, 其性质与正余弦函数有些类似. 应用正交样条函数, 构造一种有别于小波分析的多分辨率理论, 并给出递推公式. 相对于小波分析, 其在无损压缩方面的压缩量更大, 效果更好. 在信号分解等到方面, 具有好的应用前景.

关键词 样条函数, 信号处理, 正交函数

中图分类号 O 174.41; TN 911.7

文献标识码 A

多分辨率分析是小波分析的很重要的应用方面, 也是目前小波分析应用最广泛的原因之一. 它之重要在它可以多层次地描述信号, 并能由细到粗地观察信号. 而且可以提取信号的细微特征, 从而检测出信号突变信号, 并能实现信号的编码压缩. 自从 Mallat 的文章^[1]发表以来, 小波分析的应用被广泛采用. 目前 JPEG-2000 标准已经逐渐由以余弦变换基础标准, 转换为以小波变换为基础的标准. 我们将有限元正交化, 构造一组正交有限元方法^[2~4]. 2003 年又应用正交有限元, 建立多分辨率的新理论^[5]. 本文是在文[2~5]的基础上, 提出基于正交样条函数的一种多变分析的方法.

1 正交样条函数

给定一个非递减的序列等分节点为 $U: 0, 1, 2, 3, \dots, k$, 样条基函数定义为

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & i \leq x < i+1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,k}(x) = \frac{x-i}{k-1}N_{i,k-1}(x) + \frac{i+k-x}{k-1}N_{i+1,k-1}(x), \quad (2)$$

其中 k 为样条的阶数. 首先将样条基函数平移

$$\tilde{N}_k(x) = N_{i,k}(x - k/2). \quad (3)$$

以下我们来构造在周期区域 $(0, L)$ 的正交样条函数, 有

$$\left. \begin{aligned} S_i^{n,k}(x) &= \sum_{l=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2il\pi}{n}\right) \tilde{N}_k\left(\frac{mx}{L} - l\right), & i &= 0, 1, \dots, \frac{n}{2}, \\ C_i^{n,k}(x) &= \sum_{l=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2il\pi}{n}\right) \tilde{N}_k\left(\frac{nx}{L} - l\right), & i &= 0, 1, \dots, \frac{n}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

我们称 $C_i^{n,k}(x)$ 为正交余弦样条, 而 $S_i^{n,k}(x)$ 为正交正弦样条. 上述样条函数有

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^L S_i^{n,k}(x) S_j^{n,k}(x) dx &= 0, \\ \int_0^L C_i^{n,k}(x) C_j^{n,k}(x) dx &= 0, & \forall i \neq j, \\ \int_0^L S_i^{n,k}(x) C_j^{n,k}(x) dx &= 0, & \forall i, j. \end{aligned} \right.$$

收稿日期 2004-08-26

作者简介 林福泳(1958-), 男, 副教授, 主要从事固体力学和图像处理的研究. E-mail: fylin@hqu.edu.cn

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(03QZR1)

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

2 多分辨率分析

现让我们构造周期域 $(0, L)$ 上的样条函数空间 $V_n = \{ \sum_{i=0}^{n/2} a_i S_i^{n,k}(x) + b_i C_i^{n,k}(x) \}$, $\forall a_i, b_i \in R$. 如果我们选择 $n = 2^j K$, $j = 1, 2, \dots$, 就得到一系列的样条函数空间. 有 $V_{2^j K}$, $j = 1, 2, \dots$ 我们很容易知道这些函数空间的包含关系为 $V_K \subset V_{2K} \subset \dots \subset V_{2^{j-1}K} \subset V_{2^j K}$. 显然, 空间 $V_{2^j K}$ 是空间 $V_{2^{j-1}K}$ 进一步的划分. 因此, 我们可将空间 $V_{2^j K}$ 分解为正交的两个子空间, $V_0 = V_{2^j K} = V_{2^{j-1}K} \oplus V_{2^{j-1}K}^\perp$. 这里, 在空间 $V_{2^j K}$ 中, $V_{2^{j-1}K}^\perp$ 是正交于空间 $V_{2^{j-1}K}$. 以此类推, 可得空间的多层分解. 有

$$\begin{aligned} V_0 &= V_{2^j K} = V_{2^{j-1}K} \oplus V_{2^{j-1}K}^\perp = V_{2^{j-2}K} \oplus V_{2^{j-2}K}^\perp \oplus V_{2^{j-1}K}^\perp = \dots = \\ V_K &= V_K^T \oplus \dots \oplus V_{2^{j-1}K}^T. \end{aligned} \quad (5)$$

现在让我们考虑这些分解. 首先考虑函数空间 V_{2m} 与 V_m 之间的关系. 任何函数, V_{2m} 函数空间的系数用上标或下标 $2m$ 表示, V_m 函数空间则用上标或下标 m 表示. 于是函数在 V_{2m} 与 V_m 空间的投影, 可以分别表示为

$$u_{2m}(x) = \sum_{j=0}^m a_j^{2m} C_j^{2m,k}(x) + \sum_{j=0}^m b_j^{2m} S_j^{2m,k}(x), \quad u_m(x) = \sum_{j=0}^{m/2} a_j^m C_j^{m,k}(x) + \sum_{j=0}^{m/2} b_j^m S_j^{m,k}(x), \quad (6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_j^{2m} &= \int_0^L u(x) C_j^{2m,k}(x) dx / A_j^{m,k}, & b_j^{2m} &= \int_0^L u(x) S_j^{2m,k}(x) dx / A_j^{m,k}, \\ a_j^m &= \int_0^L u(x) C_j^{m,k}(x) dx / A_j^{m,k}, & b_j^m &= \int_0^L u(x) S_j^{m,k}(x) dx / A_j^{m,k}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$A_j^{m,k} = \int_0^L (C_j^{m,k}(x))^2 dx = \int_0^L (S_j^{m,k}(x))^2 dx$. 应用最小二乘法, 可以得到 V_{2m} 到 V_m 的投影关系为

$$\left. \begin{aligned} a_{mj} &= C_{j,1} a_j^{2m} + C_{j,2} a_{m-j}^{2m}, & j &= 0, 1, 2, \dots, m/2, \\ b_{mj} &= S_{j,1} b_j^{2m} + S_{j,2} b_{m-j}^{2m}, & j &= 1, 2, \dots, m/(2-1). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} C_{j,1} &= \int_0^L C_j^{2m}(x) C_j^m(x) dx / A_j^{m,k}, & C_{j,2} &= \int_0^L C_{m-j}^{2m}(x) C_j^m(x) dx / A_j^{m,k}, \\ S_{j,1} &= \int_0^L S_j^{2m}(x) S_j^m(x) dx / A_j^{m,k}, & S_{j,2} &= \int_0^L S_{m-j}^{2m}(x) S_j^m(x) dx / A_j^{m,k}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

同样应用最小二乘法, 得到 V_m 空间到 V_{2m} 的投影为 $u^{2m}(x) = \sum_{j=0}^{m/2} s_j^{2m} C_j^{m,k}(x) + \sum_{j=0}^{m/2} t_j^{2m} S_j^{m,k}(x)$. 这里 $s_j^{2m} = C_{j,1} a_j^m$, $s_{m-j}^{2m} = C_{j,2} a_j^m$, $j = 0, 1, 2, \dots, m/2$, $t_j^{2m} = S_{j,1} b_j^m$, $t_{m-j}^{2m} = S_{j,2} b_j^m$, $j = 1, 2, \dots, m/(2-1)$. 考虑方程 (8), 我们得到

$$\left. \begin{aligned} s_j^{2m} &= (C_{j,1})^2 a_j^{2m} + C_{j,1} C_{j,2} a_{m-j}^{2m}, & s_{m-j}^{2m} &= C_{j,2} C_{j,1} a_j^{2m} + (C_{j,2})^2 a_{m-j}^{2m}, \\ t_j^{2m} &= (S_{j,1})^2 b_j^{2m} + S_{j,1} S_{j,2} b_{m-j}^{2m}, & t_{m-j}^{2m} &= S_{j,2} S_{j,1} b_j^{2m} + (S_{j,2})^2 b_{m-j}^{2m}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

应用方程 (8), (10), 可以得到信号的多分辨率分解, 有

$$u^{2m}(x) = (u^{2m}(x) - u^m(x)) + (u^m(x) - u^{m/2}(x)) + \dots + u^{m/2^k}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u^{2m/2^i} - u^{2m/2^{i+1}} &= \sum_{j=0}^{2^{i-1}m} \{ a_j^{2m/2^i} C_j^{2m/2^i,k}(x) + b_j^{2m/2^i} S_j^{2m/2^i,k}(x) \}, & i &= 0, 1, 2, \dots, k+1, \\ u^{m/2^k} &= \sum_{j=0}^{m/2^k} (a_j^{m/2^k} C_j^{m/2^k,k} + b_j^{m/2^k} S_j^{m/2^k,k}). \end{aligned} \quad (12)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} a_j^{2m} &= a_j^{2m} - (C_{j,1})^2 a_j^{2m} - C_{j,1} C_{j,2} a_{m-j}^{2m}, & a_{m-j}^{2m} &= a_{m-j}^{2m} - C_{j,2} C_{j,1} a_j^{2m} - (C_{j,2})^2 a_{m-j}^{2m}, \\ b_j^{2m} &= b_j^{2m} - (S_{j,1})^2 b_j^{2m} - S_{j,1} S_{j,2} b_{m-j}^{2m}, & b_{m-j}^{2m} &= b_{m-j}^{2m} - S_{j,2} S_{j,1} b_j^{2m} - (S_{j,2})^2 b_{m-j}^{2m}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

从上述可以看出, 信号可以分解, 即

$$u_{2m} \Rightarrow \begin{cases} u_m, \\ u_{2m} - u_m, \end{cases} \quad \begin{cases} u_{m/2} \\ u_m - u_{m/2} \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} u_{m/2^l}, \\ u_{m/2^{l-1}} - u_{m/2^l}. \end{cases} \quad (14)$$

它们基函数的分量逐次递推关系为

$$a_j^{2m,k} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a_j^{m,k} \\ a_j^{',2m,k} \\ a_{m-j}^{',2m,k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a_j^{m/2,k} \\ a_j^{',m,k} \\ a_{m/2-j}^{',m,k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a_j^{m/2^l,k} \\ a_j^{',m/2^{l-1},k} \\ a_{m/2^l-j}^{',m/2^{l-1},k} \end{matrix} \right\}, \tag{15}$$

$$b_j^{2m,k} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} b_j^{m,k} \\ b_j^{',2m,k} \\ b_{m-j}^{',2m,k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} b_j^{m/2,k} \\ b_j^{',m,k} \\ b_{m/2-j}^{',m,k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} b_j^{m/2^l,k} \\ b_j^{',m/2^{l-1},k} \\ b_{m/2^l-j}^{',m/2^{l-1},k} \end{matrix} \right\}. \tag{16}$$

由于 $a_j^{m/2^i,k}$, $b_j^{m/2^i,k}$ 的动态相对于 $a_j^{m/2^i,k}$, $b_j^{m/2^i,k}$ 的动态小得多, 因此在分解通过编码过程就形成数据压缩. 本方法相对于小波, 可以利用公式(8)和(13). 只要记住 $a_j^{m/2^i,k}$, $b_j^{m/2^i,k}$, 而不必记住 $a_{m/2^i-j}^{m/2^i,k}$, $b_{m/2^i-j}^{m/2^i,k}$, 同样没有丢失信号. 信号恢复过程为

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ \begin{matrix} a_j^{m/2^l,k} \\ a_j^{',m/2^{l-1},k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a_j^{m/2^{l-1},k} \\ a_{m/2^{l-1}-j}^{',m/2^{l-1},k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a_j^{m/2^{l-2},k} \\ a_{m/2^{l-2}-j}^{',m/2^{l-2},k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} a_j^{m,k} \\ a_{m/2-j}^{',m,k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a_j^{m,k}, \\ &\left\{ \begin{matrix} b_j^{m/2^l,k} \\ b_j^{',m/2^{l-1},k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} b_j^{m/2^{l-1},k} \\ b_{m/2^{l-1}-j}^{',m/2^{l-1},k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} b_j^{m/2^{l-2},k} \\ b_{m/2^{l-2}-j}^{',m/2^{l-2},k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} b_j^{m,k} \\ b_{m/2-j}^{',m,k} \end{matrix} \right\} \Rightarrow b_j^{m,k}. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

整个分解过程是递推的, 故可分解到奇数阶为止. 但在实用上, 只要分解能得到信号特征即可.

3 例子

下面, 我们用三次样条函数作为三次样条基为例子. 首先给出正交样条为

$$\left. \begin{aligned} S_j^{m,4}(x) &= \frac{1}{A_j^{n,k}} \sum_{l=0}^{n-1} \sin(\frac{2il\pi}{n}) N_k(\frac{nx}{L} - l), \quad j = 0, 1, \dots, n/2, \\ C_i^{n,4}(x) &= \frac{1}{A_j^{n,k}} \sum_{l=0}^{n-1} \cos(\frac{2il\pi}{n}) N_k(\frac{nx}{L} - l), \quad j = 0, 1, \dots, n/2, \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

式中 $A_j^{m,4} = ((1\ 233-70+2\ 382/140 \cos(j\pi/m) + 6/7 \cos(2j\pi/m) + 1/140 \cos(2j\pi/m))L/4)$. 为了方便, 我们只做正交余弦分解, 于是信号可写为 $u_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j^m C_j^{m,4}(x)$, 其中

$$a_{mj} = \int_0^L C_j^{m,4}(x) u(x) dx.$$

由公式(8)可以得到

$$a_j^{m/2} = C_{j,1} a_j^m + C_{j,2} a_{m-j}^m, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m/2. \tag{19}$$

两个相邻的分解间的信号差为

$$u_m(x) - u_{m/2}(x) = \sum_{j=0}^{m/2} a_j^{',m} C_j^{m,4}(x) + \sum_{j=1}^{m/2} a_{m-j}^{',m} C_j^{m,4}(x),$$

其中 $a_j^{',m} = a_j^m - C_{j,1} C_{j,1} a_j^m - C_{j,1} C_{j,2} a_{m-j}^m$, $a_j^{',m} = a_j^m - C_{j,2} C_{j,1} a_j^m - C_{j,2} C_{j,2} a_{m-j}^m$. 图 1 为信号按本文方法

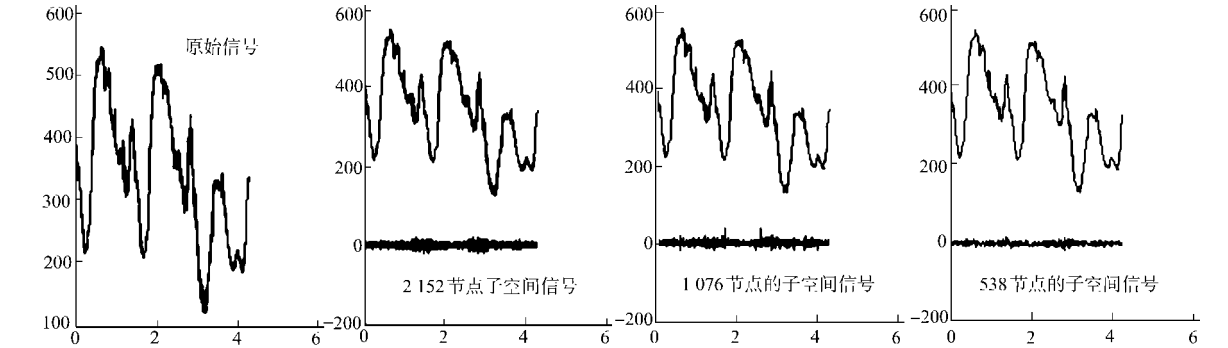


图 1 信号分解的实例

分解的例子. 实际上, 我们可以看出高频信号比低频信号小的多, 而且越向下分解信号越平滑. 应用正交样条函数对信号进行处理, 可以得到与小波分析相类似的结果. 它可用于突变信号的检测(用高频信号), 去掉高频信号自然就得到信号的滤波.

4 结果与讨论

构造正交样条函数, 其性质与正余弦函数有些相似. 本文应用正交样条函数, 推导一种有别于小波分析的信号多分辨率分析理论. 公式(9)可以采用简单的数值求和的方法代替积分, 计算量不大. 而式(8), (13)递推公式相对小波并不增加复杂性, 而且所构造的函数是显式和连续, 并不象有的小波函数必须用数值方式来表示. 最主要的是本文所提出的方法可在做分解时, 贮存这些分解, 不需要额外的样本. 由于样本量没有增加, 就能实现高频与低频的分解, 因此有望通过这一理论实现信号更大倍数的压缩. 通过分块后, 用直线直接对信号的各块的边界置零, 后用各块中再用正交正弦样条函数分解, 将直接形成各块之间的连续性, 因此不象余弦变换一样需要修正. 这样处理后可分开信号, 有些段比较平滑只需低频的几个样本就可以, 而振荡比较激烈的部分用较多的样本. 因此, 本文提出的方法具有很好的应用前景. 正交样条函数的其它应用见文[3, 6], 应用其它分片多项基构造正交分片多项式见文[2, 4, 5]. 本文只结出正交样条函数的初步应用, 更完善的理论有待于进一步的研究. 正交样条数的多维扩展, 我们将用另文给出.

参 考 文 献

- 1 Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: The wavelet transform[J]. IEEE Trans., PAMI, 1989, 11(7): 674~ 693
- 2 Lin Fuyong. Orthogonal continuous segmentation function[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 154(3): 599~ 607
- 3 林福泳. 正交样条函数及其应用[J]. 机械科学与技术, 2003, (增刊): 123~ 125
- 4 林福泳. 正交有限元及其在工程中的应用[D]:[学位论文]. 天津: 天津大学机械学院, 2003. 60~ 78
- 5 林福泳. 一种信号多分辨率的新方法[J]. 西南交通大学学报(自然科学版), 2003, 38(5): 574~ 577
- 6 林福泳. 板弯曲问题的群论方法[J]. 计算力学学报, 2004, 21(4): 459~ 462
- 7 Lin Fuyong. Multiresolution theory of signal processing based on finite element method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 161: 293~ 310
- 8 Lin Fuyong. Orthogonal bases of 3-B spline and its application in bending problem of plate and beam system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 162: 723~ 733

A Method of Multi-Resolution and Analysis Based on Orthogonal Spline Function

Lin Fuyong

(College of Mechanical Engineering and Automation, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract To construct orthogonal spline function which is similar somewhat to $\sin(x)$ and $\cos(x)$ in property, a theory of multiresolution differing from wavelet analysis is constructed by applying orthogonal spline function; and recursion formula is given. Compared with wavelet analysis, the orthogonal spline function shows more greater compression on non-destructive compression and also better effect. It has good prospect of application in signal decomposition and other aspects.

Keywords spline function, signal processing, orthogonal functions