

文章编号 1000-5013(2005)02-0164-04

# 分析表面裂纹的一种新方法

张传立 彭兴黔

( 长江大学机械工程学院, 湖北 荆州 434023; 华侨大学土木工程学院, 福建 泉州 362021 )

**摘要** 用边界积分方法, 分析表面裂纹的张开位移和应力强度因子. 此方法将埋在无穷大弹性介质中裂纹, 模拟为连续分布的位错环. 根据两个位错环之间的相互作用能, 可以得到弹性体的应变能; 对弹性体的势能取极值, 可以得到关于裂纹张开位移的边界积分方程. 通过把半空间的边界模拟成一个包含在无穷大弹性介质中大裂纹, 此法能很好的处理具有任意表面形状的表面裂纹. 两个实验算例的计算结果与已有的解析解吻合很好, 说明此方法的有效性和精确性. 文中还分析具有表面台阶的表面裂纹的应力强度因子, 结果有利于分析表面裂纹的扩展.

**关键词** 表面裂纹, 边界积分方法, 应力强度因子, 张开位移

**中图分类号** TB 303; O 346. 1; O 241. 4

**文献标识码** A

在许多情况下, 裂纹往往是从构件的表面开始, 因此工程中存在大量的表面裂纹问题. 例如, 在对集成电路板进行刻蚀加工中, 表面裂纹是引起电路板破坏的主要原因<sup>[1]</sup>. 对表面裂纹的分析可以分为理论分析和数值计算两类. 在理论分析方面, 大多数研究者通过对作用于半空间边界上点载荷的格林函数进行积分, 分析表面裂纹的张开位移和应力强度因子<sup>[2]</sup>. 然而, 这些分析方法对表面的几何形状都有严格的要求. 在数值计算方面, 一般将该问题转换成求解一个具有高奇异性的边界积分方程<sup>[3]</sup>, 这在数值处理上有较大的难度. 文献[4]发展一种边界积分方法, 可以求解包含在弹性体中具有任意几何构形的三维裂纹. 该方法通过把裂纹的张开位移模拟成连续分布的位错环, 使所得到的积分方程只有  $1/R$  的中度奇异性. 本文将该方法扩展到求解表面裂纹的问题, 通过把半空间的边界模拟为一包含在无穷大弹性介质中大裂纹, 可以直接将原有的边界积分方程用于分析表面裂纹. 用此方法, 还能处理任意表面几何形状的表面裂纹问题.

## 1 边界积分方程及表面裂纹处理

文献[4]发展一种埋在无穷大弹性介质中, 能求解任意三维裂纹的张开位移和应力强度因子的边界积分方法. 现介绍该边界积分方法的基本内容, 并说明如何将该方法扩展到分析表面裂纹.

令  $S$  表示裂纹的表面, 定义  $u(x)$  为裂纹上下面的相对位移,  $x \in S$ ,  $u_i$  为其在 3 个坐标基矢  $e_i (i = 1, 2, 3)$  上的分量. 通过把裂纹的张开位移模拟为连续分布的位错环, 并利用两个位错环之间相互作用能的表达式, 可以得到包含裂纹的无穷大弹性体的应变能为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} Wu = & \frac{\mu}{4\pi} \int_S \int_S \frac{[e_i(n \times u_j)_2][e_j(n \times u_i)_1]}{R} dS_1 dS_2 - \\ & \frac{\mu}{8\pi} \int_S \int_S \frac{[e_i(n \times u_i)_1][e_j(n \times u_j)_2]}{R} dS_1 dS_2 + \\ & \frac{\mu}{8\pi(1-\nu)} \int_S \int_S [e_i(n \times u_i)_1] T \cdot [e_j(n \times u_j)_2] dS_1 dS_2. \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期 2004-07-31

作者简介 张传立(1965-), 男, 副教授, 主要从事固体力学的研究. E-mail: chuanliz99@yahoo.com

基金项目 教育部科学技术研究重点课题基金资助项目(204090)

在式(1)中,  $(\cdot)_1$  和  $(\cdot)_2$  为裂纹表面  $S$  上的不同两点,  $R$  是这两点的距离,  $n$  为裂纹面的单位法向量,  $\mu$  为剪切弹性模量,  $\nu$  为泊松比,  $T$  为一张量. 其各分量定义为

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2)$$

系统的势能为应变能与外力势能之和. 设作用于裂纹表面的外载为  $t$ , 则系统的势能可以表示为

$$\Pi u = Wu - \int_S t \cdot u dS. \quad (3)$$

对势能函数  $\Pi$  取极小值, 可以得到关于裂纹张开位移  $u$  的边界积分方程. 采用 6 结点三角形单元对裂纹表面进行离散, 裂纹的张开位移可以表示为  $u_i = u_{ia} N_a$ ,  $u_{ia}$  表示单元结点位移, 下标  $i$  表示方向,  $a$  表示单元结点,  $N_a$  为形函数. 离散的系统势能可表示为

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N K_{ijab} u_{ia} u_{jb} - \sum_{a=1}^N f_{ia} u_{ia}, \quad (4)$$

式中  $N$  为结点总数. 通过对离散的系统势能取极值, 可得如下线性代数方程组为

$$\sum_{b=1}^N K_{ijab} u_{jb} = f_{ia}. \quad (5)$$

求解该线性方程组, 可得裂纹的张开位移.

为了用该方法分析表面裂纹, 方法之一是利用在半空间中无穷小位错环的解, 修改上述边界积分方程. 这在数学处理上有很大的难度. 在这里, 我们将表面模拟成一无穷大的裂纹来考虑表面的影响, 从而可以直接利用原来的边界积分方程. 由于虚拟裂纹的尺寸无穷大, 该问题等价于求解一个无穷大弹性体中包含两个相交裂纹问题. 其中一个裂纹是真实存在的裂纹, 另一个裂纹是模拟半空间边界的虚拟大裂纹. 作用于半空间边界上的载荷, 应对称地作用于大裂纹的两裂纹面上. 在进行数值计算时, 还应注意对两裂纹面交点的处理. 由于计算中的基本未知量是裂纹面的相对位移, 如果在不同的裂纹面上, 交点的位移所表示的物理意义是不一样的. 因此, 我们不能用一个结点来表示两裂纹的交点. 在这里, 我们构造 3 块相距很近的网格, 即左表面、右表面和裂纹面. 在交点处, 有 3 个结点, 它们都表示真实弹性体中的同一点, 其位移表示各自所在裂纹面在该点的张开位移. 这 3 个结点的位移不是相互独立的, 而是存在一定的位移约束关系. 该位移约束方程必须加到整个系统的方程中去.

裂纹尖端的应力强度因子可以直接通过裂纹的张开位移求得. 对于一个二维裂纹, 设  $u_i$ ,  $u_r$  分别表示裂纹尖端一点的法向位移和切向位移. 那么, 则裂纹尖端的应力强度因子可以表示为<sup>[4]</sup>

$$K = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} u_i, \quad (8)$$

$$K = \frac{\mu}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{\rho}} u_r. \quad (9)$$

式中的  $\rho$  为该点距裂纹尖端的距离. 为了保证计算的精确性, 该点必须尽可能的靠近裂纹的尖端, 这就要求在裂纹尖端区域的网格尽量密.

## 2 验证算例

为了验证本方法的有效性和精确性, 我们选择两个有解析解的简单问题, 与采用本文算法所得数值结果比较. 首先考察一弹性半平面, 在表面受均布压力作用. 如图 1(a) 所示. 据前述提供的方法, 该问题等价于在一无穷大弹性介质中包含一大裂纹. 作用于表面的载荷对称地作用于大裂纹的两个裂纹面上, 如图 1(b) 所示. 需要说明的是裂纹尖端的边界条件, 与半平面表面上对应处的边界条件是不同的. 为了消除其影响, 在距裂纹尖端和载荷作用较远处选取一个位移参考点, 所计算的位移减去参考点的位移即可消除这种影响. 根据对称性, 所计算裂纹张开位移的一半即为半平面表面的位移. 图 2 给出计算结果,  $E$  为杨氏弹性模量,  $u_z$  为表面的垂直线位移. 图中的实线为采用本方法所得数值计算结果, 虚线为根据弹性理论所得的解析解. 两条曲线吻合很好, 说明了本方法的精确性. 另一个验证算例是包含表面裂纹的半平面在远处受均布拉力, 见图 3 所示. 表面裂纹的长度为  $a$ , 倾角为  $\theta$ . 当  $\theta = \pi/2$  时, 裂纹面与表面垂直, 文[5]给出其裂纹张开位移的经验公式. 这个公式是根据实验结果得出来的. 通过大量的计算, 可

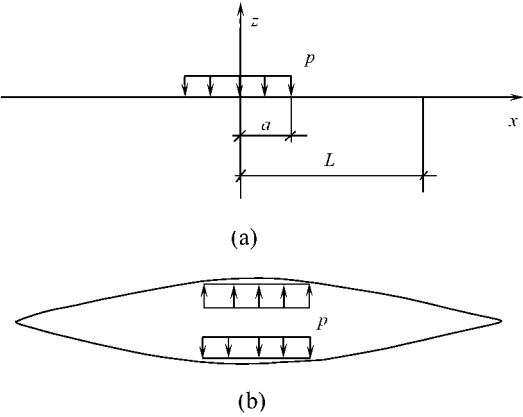


图 1 半平面边界上受均布法向载荷作用

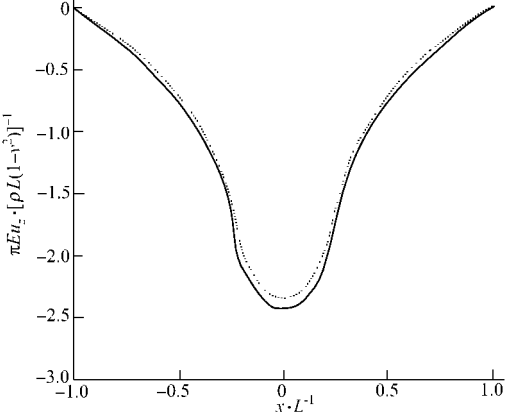


图 2 半平面在表面受法向均布载荷引起的表面位移

以证明其计算精度在 1% 之内<sup>[5]</sup>. 图 4 中的实线为采用本方法计算的裂纹张开位移, 虚线为文 [5] 中的

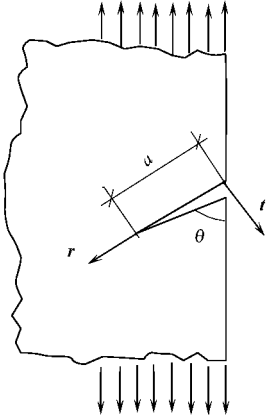


图 3 含有表面裂纹的半平面

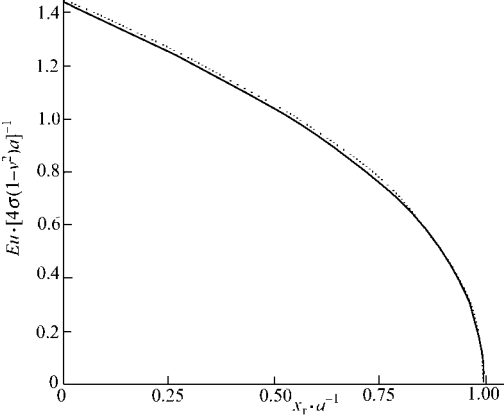


图 4 表面裂纹的张开位移

经验公式计算的结果. 图中显示两条曲线吻合很好. 文 [6] 采用位错模型, 给出表面裂纹应力强度因子的分析方法. 我们结合图形进行验证, 显示了本文结果与文献结果的一致性.

3 具有表面台阶的表面裂纹分析

现结合图 5, 6, 7 进行分析. 如前所述, 本方法的突出优点在于能处理具有任意表面形状的问题. 本节分析图 5 所示在表面台阶处表面裂纹的应力强度因子. 由于台阶处的应力集中, 表面裂纹往往在该处

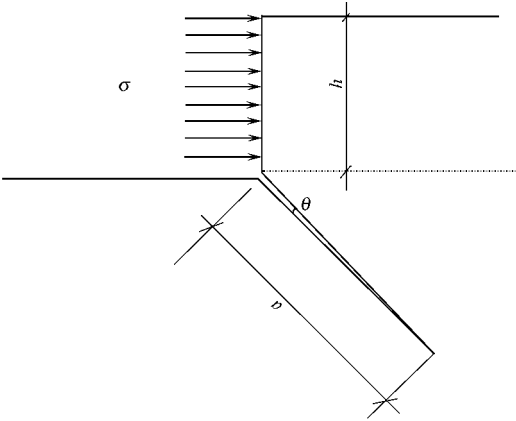


图 5 表面台阶处的表面裂纹

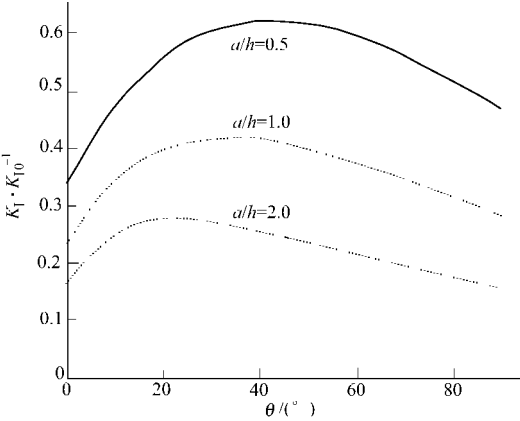


图 6 应力强度因子( $K_I$ )与倾角的关系曲线

首先产生, 并扩展导致构件的破坏, 如机械构件表面的开槽处、集成电路板的刻蚀处等. 因此, 对该问题的分析在工程中具有重要的意义. 图 6, 7 给出在不同的裂纹长度与台阶高度的比值( $a/h$ )下, 应力强度因子( $K_I, K_{II}$ )与表面裂纹倾角的关系曲线. 应力强度因子用  $K_{I0} = \sigma \sqrt{\pi a}$  作无量纲化. 从图中可以看

出, 台阶越高(  $a/h$  越小), 应力集中程度越高, 计算的应力强度因子也越大. 随着裂纹倾角的变化, 应力强度因子也在变化. 应力强度因子  $K$  在某一位置有极大值, 而对应该位置的应力强度因子  $K$  为零. 该方向也为裂纹扩展的方向.

## 4 结束语

将已有边界积分方法扩展, 用来分析表面裂纹的张开位移和应力强度因子. 把表面模拟为包含在无穷大弹性介质中的大裂纹, 致使表面裂纹问题等价于两个相交裂纹包含在无穷大介质中的问题. 该方法的突出优点, 在于能处理具有任意表面形状的表面裂纹问题. 两个实验算例与已有的结果相吻合, 说明本方法的有效性和准确性. 最后, 对具有表面台阶的表面裂纹的应力强度因子进行计算.

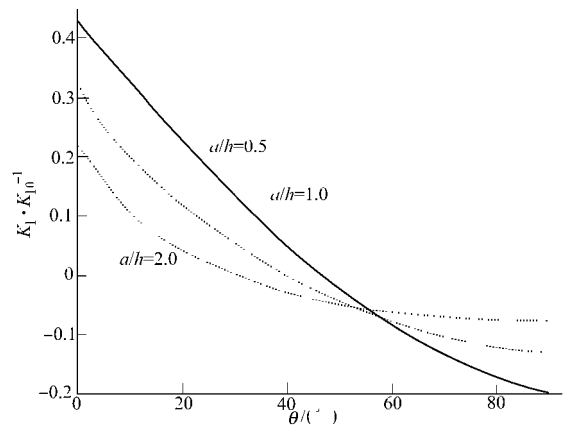


图 7 应力强度因子(  $K$  )与倾角的关系曲线

## 参 考 文 献

- 1 Huang Yichau , Flidr Newton T A, Hines M A. Dynamic repulsion of surface steps during step flow etching: Controlling surface roughness with chemistry [ J ]. Journal of Chemical Physics, 1998, 109( 12): 5 025~ 5 026
- 2 Rooke D P, Rayaprolu D B, Aliabadi M H. Crack line and edge Green's functions for stress intensity factors of inclined edge cracks[ J ]. Fatigue. Fract. Engng. Mater. Struct. , 1992, 15: 441~ 461
- 3 Sladek V, Sladek T. Three dimensional curved crack in an elastic body [ J ]. International Journal of Solids Structures, 1983, 19(5): 425~ 436
- 4 Xu Guanshui, Ortiz M. A variational boundary integral method for the analysis of 3 D cracks of arbitrary geometry modeled as continuous distributions of dislocation loops[ J ]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1993, 36: 3 675~ 3 701
- 5 Tada H, Paris P C, Irwin G R. The stress analysis of cracks handbook[ M ]. 3rd ed. New York: ASM E Press, 2000. 78~ 104
- 6 Seed G M. Stress intensity factors for a surface breaking crack in a half plane subject to contact loading[ J ]. Fatigue. Fract. Engng. Mater. Struct. , 2001, 23: 69~ 79

# A New Method for Analysing Surface Cracking

Zhang Chuanli      Peng Xingqian

( College of Mechanical Engineering, Yangtze University, 434023, Jingzhou, Hubei China;  
College of Civil Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

**Abstract** The boundary integral method is applied to the analysis of opening displacement and stress intensity factor of surface crack. The method simulates the crack hiding in infinitely large elastic media as dislocation loop in continuous distribution. According to interaction energy between two dislocation loops, we can obtain strain energy of elastic body; to take extrema from potential energy of elastic body, we can obtain boundary integral equation for the opening displacement of cracking. This method simulates the boundary in half space into a large crack containing in an infinitely great elastic medium, by which the surface crack in arbitrary shape can be well treated. The reckoning of two test examples is in good agreement with analytic solution now available, which accounts for the validity and the accuracy of this method. The authors also analyse the stress intensity factor of the surface crack with surface step, the results is beneficial to determine the direction of crack growth.

**Keywords** surface crack, boundary integral method, stress intensity factor, opening displacement