

文章编号 1000-5013(2005)02-0149-03

# 静水压力作用下两铰圆拱稳定的截面优化设计

曾 志 兴

(华侨大学土木工程学院, 福建 泉州 362021)

**摘要** 采用泛函极值分析方法, 推导出圆拱截面函数和挠曲函数的稳定方程. 利用瑞利里兹法, 近似求解在静水压力作用下, 两铰圆拱呈反对称屈曲和正对称屈曲状态的临界荷载和截面的优化形式.  
**关键词** 圆拱, 稳定, 优化设计, 临界荷载  
**中图分类号** TU 33.04; TU 311.4 **文献标识码** A

圆拱是一种被广泛应用于土木工程中的建筑结构, 圆拱的受力和稳定计算一直是工程设计所关注的主要问题. 对受压构件的截面优化设计, 主要限于直杆<sup>[1~4]</sup>; 而对圆拱的设计, 仅限于等截面圆拱的稳定分析方面<sup>[5~7]</sup>. 本文所作的圆拱稳定截面优化设计, 能较好地体现出工程设计的经济性要求.

## 1 问题的提出

图 1 为两铰圆拱受静水压力作用的示意图. 考虑圆拱为矩形截面, 其中圆拱长度  $l = 2\alpha R$ , 材料弹性模量  $E$ , 圆拱体积  $V$  和圆拱的截面宽度  $b$  均为常量, 而截面高度  $h$  为变量. 试确定  $h$  的函数形式, 使圆拱所承受的临界荷载  $q_\alpha$  达到最大值. 忽略圆拱轴向变形的影响, 即  $u' = w$ . 此优化问题可表示为<sup>[7]</sup>

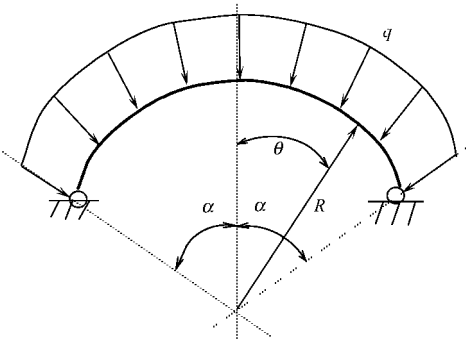


图 1 受静水压力作用的两铰圆拱

$$\left. \begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[ \frac{Ebh^3}{12R^3} (u + u')^2 - 2qRu' - q(u''^2 + uu'') \right] d\theta, \\ V = & \int_{-\alpha}^{\alpha} bhR d\theta, \quad u(-\alpha) = u(\alpha) = 0, \\ u'(-\alpha) = w(-\alpha) = u'(\alpha) = w(\alpha) = 0, & \quad u(-\alpha) = u''(-\alpha) = u(\alpha) = u''(\alpha) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

在式(1)中,  $\Pi$  为圆拱的总势能,  $u$  为圆拱的轴向位移,  $w$  为圆拱的径向位移. 由式(1)可知, 此优化问题为带定积分约束条件的泛函极值问题, 应用拉格朗日乘子法, 可将条件极值问题方便地化为无条件极值问题<sup>[8]</sup>. 因此, 构造一个新泛函为

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} F d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[ \frac{Ebh^3}{12R^3} (u + u')^2 - 2qRu' - q(u''^2 + uu'') - 2\lambda bhR \right] d\theta, \quad (2)$$

上式中,  $\lambda$  为拉格朗日乘子. 求泛函极值计算  $\delta \Pi^* = 0$ , 得新泛函驻值条件为

$$\frac{d^3}{d\theta^3} \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right) - \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial F}{\partial u''} \right) - \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0. \quad (3)$$

将  $F$  代入式(3)作求导运算, 并整理得

$$\frac{d^3}{d\theta^3} \left[ \frac{Ebh^3}{12R^3} (u + u') + qu' \right] + \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{Ebh^3}{12R^3} (u + u') + qu' \right] = 0, \quad \frac{Eh^2}{4R^3} (u + u') - 2\lambda = 0. \quad (4)$$

式(4)即为圆拱截面优化设计的稳定控制方程, 再加上相应的边界条件, 即成为定解问题. 注意两铰圆拱的边界条件, 式(4)的第 1 式化简, 其优化问题的数学微分表达式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{Ebh^3}{12R^3}(u + u') + qu' &= 0, \\ h^2(u + u')^2 - 8R^4/E &= 0, \\ u(-\alpha) = u(\alpha) &= 0, \\ u'(-\alpha) = w(-\alpha) = u'(\alpha) = w(\alpha) &= 0, \\ u(-\alpha) = w''(-\alpha) = u(\alpha) = w''(\alpha) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)与式(1)为等价的数学表示.

## 2 圆拱优化设计的近似计算

式(5)的数学分析很复杂, 不能求出圆拱屈曲的挠曲函数和截面函数的解析解. 可采用数值方法计算式(5)的定解问题, 较为简便的方法是对式(1)进行泛函分析直接计算. 式(1)的总势能积分式中有两个未知函数——挠曲函数和截面函数. 可先从式(5)的前两式中, 求出挠度与截面的函数关系为

$$h = \left( \frac{18R^2 q^2 u'^2}{Eb^2} \right)^{1/4}. \quad (6)$$

注意圆拱截面高度不能为负数, 只取正的开方值.

### 2.1 圆拱反对称屈曲的优化设计

设满足铰支边界条件的反对称屈曲位移模式为

$$u = a(1 + \cos \frac{\pi}{\alpha} \theta), \quad (7)$$

上式中,  $a$  为任意实数. 将式(7)代入式(6)可得截面函数为

$$\left. \begin{aligned} h &= \left( \frac{18\pi^2 R^2 a^2 q^2}{Eb^2 \alpha^2 \lambda} \right)^{1/4} \sqrt{\sin \frac{\pi}{\alpha} \theta}, & \alpha \leq \theta \leq 0, \\ h &= \left( \frac{18\pi^2 R^2 a^2 q^2}{Eb^2 \alpha^2 \lambda} \right)^{1/4} \sqrt{\sin \frac{\pi}{\alpha} \theta}, & 0 \leq \theta \leq \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

记  $\left( \frac{18\pi^2 R^2 a^2 q^2}{Eb^2 \alpha^2 \lambda} \right)^{1/4} = k$ , 将式(8)代入式(1)中的第 2 式. 该被积函数无原函数, 只能用数值积分法计算, 即

$$V = \int_{-\alpha}^{\alpha} bRh(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\alpha} bRk \sin^{1/2}(\pi\theta/\alpha) d\theta = 0.75985 \times 2kbR\alpha. \quad (9)$$

将式(7)和式(8)代入式(1)中的第 1 式, 得总势能为

$$\Pi = \int_0^{\alpha} \frac{Ebk^3}{12R^3} \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right]^2 \sin^{7/2}(\pi\theta/\alpha) - q\alpha^2 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right] d\theta. \quad (10)$$

对式(10)求一阶变分, 采用数值积分, 并将  $k$  由式(9)计算. 可得临界荷载为

$$q_{cr} = 1.81186 \frac{[(\pi/\alpha)^2 - 1]}{12R^3} Eb \left( \frac{V}{2bR\alpha} \right)^3. \quad (11)$$

与同体积等截面圆拱相比, 优化截面圆拱临界荷载约大 81%, 而铰支压杆截面优化后的临界荷载只比铰支等截面压杆大  $1/3^{[4]}$ . 这说明圆拱截面优化设计具有较大的经济潜力.

### 2.2 圆拱正对称屈曲的优化设计

设满足铰支边界条件的正对称屈曲位移模式为  $u = a \frac{2\alpha}{\pi} \left( \sin \frac{\pi\theta}{2\alpha} + \sin \frac{3\pi\theta}{2\alpha} \right)$ , 其中  $a$  为任意实数. 将其代入式(6), 得截面函数为

$$h = \left( \frac{18\pi^2 R^2 a^2 q^2}{Eb^2 \alpha^2 \lambda} \right)^{1/4} \sqrt{\left| \cos \frac{\pi\theta}{2\alpha} + 3\cos \frac{3\pi\theta}{2\alpha} \right|} = k \sqrt{\left| \cos \frac{\pi\theta}{2\alpha} + 3\cos \frac{3\pi\theta}{2\alpha} \right|}, \quad (12)$$

与反对称屈曲的优化设计的计算相同, 得临界荷载为

$$q_{cr} = \frac{0.83(\frac{\pi^2}{4\alpha^2} - 1)^2 + 2.06(\frac{\pi^2}{4\alpha^2} - 1)(\frac{9\pi^2}{4\alpha^2} - 1) + 8.13(\frac{9\pi^2}{4\alpha^2} - 1)^2}{41[(\pi/2\alpha)^2 - 1]} \cdot \frac{Eb}{12R^3} \cdot (\frac{V}{2bR\alpha})^3. \quad (13)$$

将正对称屈曲优化截面圆拱临界荷载与同体积等截面圆拱临界荷载<sup>[5]</sup> 及比值, 分别列于表 1 所示.

表 1 铰支圆拱正对称屈曲临界荷载( $EI/R^3$ )

$\theta$	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
优化圆拱	60.094 7	46.722 9	37.165 9	30.100 6	24.731 6	20.559 5	17.253 6	14.591 7
等截面拱	33.410 1	26.207 6	21.056 0	17.244 7	14.346 3	12.091 0	10.301 9	8.859 0
荷载比值	1.798 7	1.782 8	1.765 1	1.745 5	1.723 9	1.700 4	1.674 8	1.647 1
$\theta$	$\pi/2$	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
优化圆拱	13.010 4	10.624 5	9.126 5	7.920 5	6.792 9	5.876 8	5.088 8	4.407 6
等截面拱	8.000 0	6.700 6	5.881 6	5.189 0	4.598 2	4.090 5	3.651 0	3.268 3
荷载比值	1.626 3	1.585 6	1.551 7	1.526 4	1.477 3	1.436 7	1.393 8	1.348 6

3 结果与讨论

本文两铰圆拱的截面优化设计, 采用泛函极值分析, 直接应用瑞利-里兹法, 可近似计算出相应的临界荷载, 为优化设计提出了一个新方法. 本文的分析可适用于各种边界约束、各类截面形状和任意荷载分布的圆拱. 在相同材料的用量下, 截面优化圆拱较等截面圆拱的临界荷载大得多, 在工程设计中具有较好的经济性. 这表明截面优化设计具有较高的理论性和实用性. 上述分析从实际角度来看, 存在一个问题, 这就是优化圆拱高度有  $h=0$  的截面出现. 即此处截面面积为零. 这在实际工程中是不可能的. 原因在于稳定的分析中, 材料被考虑无限弹性体. 其实在截面面积小于某定值时, 因轴向压力作用, 材料就已进入了塑性状态, 不能满足材料为线弹性的假设. 故在优化圆拱设计中, 应在  $h=0$  处附近适当加大截面, 以满足理论假设和实际要求. 但截面高度的加大, 应以该截面压应力达到材料比例极限为宜.

参 考 文 献

1 Keller J B. The shape of the strongest column, archive for rational[J]. Mechanics and Analysis, 1960, 26(5): 275~285

2 Tadjbakhsh I, Keller J B. Strongest column and isoperimetric inequalities for eigenvalue[J]. Journal of Applied Mechanics, 1962, 29( 1): 159~ 164

3 Olhoff N, Rasmussen S H. On single and bimodal optimum buckling loads of clamped column[J]. International Journal of Solids and Structures, 1977, 13( 7): 605~ 614

4 彭兴黔. 两端弹性铰支约束下压杆稳定的优化设计[ J]. 华侨大学学报( 自然科学版), 2002, 23(1): 45~ 49

5 潘 岳, 刘瑞昌. 静水压力作用下圆拱正对称失稳临界力的求解[J]. 岩土力学, 1999, 20( 1): 39~ 43

6 戚云松, 潘 岳. 垂直分布荷载作用下固支圆拱的对称失稳临界力[J]. 力学与实践, 2003, 25(5): 34~ 36

7 彭兴黔, 郭子雄. 圆拱稳定的变分分析[ J]. 华侨大学学报( 自然科学版), 2003, 24( 3): 271~ 274

8 王连祥, 方德植, 张鸣镛等. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1977. 965~ 967

Optimizedly Designing the Stable Section of Two-Hinged  
Circular Arch under the Action of Hydrostatic Pressure

Zhen Zixing

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

**Abstract** By adopting the method of functional extremum analysis, the author derives the stability equation for section function and flexure function of circular arch. By using Rayleigh-Ritz method, he solves approximately the optimized form of critical load and section of two-hinged circular arch in antisymmetrical buckling and symmetrical buckling state under the action of hydrostatic pressure.

**Keywords** circular arch, stability, optimized design, critical load