第26卷 第2期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 26 No. 2
2005年4月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Apr. 2005

文章编号 1000-5013(2005)02-0121-04

MPSD迭代法的敛散性定理

陈 恒 新

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 给出一些易于检验的MPSD迭代法的敛散性定理. 利用这些定理, 能较容易地判别解线性方程组 $Ax = c$ 的MPSD迭代法的敛散性.

关键词 线性方程组, MPSD迭代法, 收敛性, 发散性
中图分类号 O 241.6 文献标识码 A

在文〔1〕, 我们研究解线性代数方程组之MPSD迭代法和Jacobi迭代法的敛散关系. 本文对MPSD迭代法作了进一步研究, 给出一些易于检验的MPSD迭代法敛散性定理. 通过这些定理, 能够较容易地判别一类矩阵 $\boldsymbol{A}$ 之MPSD迭代法的敛散性, 因此具有较好的实用价值.

1 MPSD迭代法和有关记号

对于线性代数方程组

$$\boldsymbol{A}x = c. \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}$ 是 $n \times n$ 实矩阵, $\boldsymbol{D}$ 是非奇异对角矩阵, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 是严格下和上三角矩阵. 记 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{F}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 之Jacobi迭代矩阵为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}$. 解式(1)之MPSD迭代法为

$$x^{(m+1)} = \boldsymbol{S}_{\tau,\omega_1,\omega_2} x^{(m)} + \tau(\boldsymbol{I} - \omega_2\boldsymbol{U})^{-1}(\boldsymbol{I} - \omega_1\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}b, \qquad \tau \neq 0, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{S}_{\tau,\omega_1,\omega_2} = (\boldsymbol{I} - \omega_2\boldsymbol{U})^{-1}(\boldsymbol{I} - \omega_1\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\tau)\boldsymbol{I} + (\tau - \omega_1)L + (\tau - \omega_2)\boldsymbol{U} + \omega_1\omega_2\boldsymbol{LU}]. \tag{3}$$

当MPSD法中参数 ω_1, ω_2, τ 取不同的值, 便可得到各种迭代法. 如取 $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 0$, τ 不变为AOR法; 取 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\tau = \omega(2-\omega)$ 为SSOR法; 取 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, τ 不变为PSD法; 取 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\tau = 1$ 为PJ法.

为叙述方便, 引入如下记法. 设Jacobi迭代矩阵 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$, 空集 $\varnothing$, $\mathbf{N}_1 \cup \mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_1 \cup \mathbf{N}_2 = \mathbf{N} = \{1, 2, \cdots, n\}$ 且 $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 = \varnothing$, $\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2 = \varnothing$. $b_i = \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$, $b_i = \sum_{j=1}^{n} |b_{ji}|$, $\mathbf{N}^- = \{i \mid b_i < 1, i \in \mathbf{N}\}$, $\mathbf{N}^+ = \{i \mid b_i \geqslant 1, i \in \mathbf{N}\}$, $\mathbf{N}^- = \{i \mid b_i < 1, i \in \mathbf{N}\}$, $\mathbf{N}^+ = \{i \mid b_i \geqslant 1, i \in \mathbf{N}\}$. 那么, $\mathbf{N}^- \cup \mathbf{N}^+ = \mathbf{N}^- \cup \mathbf{N}^+ = \mathbf{N}$. $\alpha_i = \sum_{j \in \mathbf{N}_1} |b_{ij}|$, $\beta_i = \sum_{j \in N_2} |b_{ij}|$, $\alpha_i = \sum_{j \in N_1} |b_{ji}|$, $\beta_i = \sum_{j \in N_2} |b_{ji}|$, 则 $\alpha_i + \beta_i = b_i$, $\alpha_i + \beta_i = b_i$. 集合 $K - L = \{i \mid i \in K$ 而 $i \notin L\}$, 对任何一 n 阶方阵 $\boldsymbol{G} = [g_{ij}]$, $|\boldsymbol{G}| = [|g_{ij}|]$. 例如, 对于本文例1的矩阵 $\boldsymbol{B}$, 有 $\mathbf{N}^- = \{1, 2\}$, $\mathbf{N}^+ = \{3, 4\}$. 若取 $\mathbf{N}_1 = \{1\}$, 则 $\mathbf{N}_2 = \{2, 3, 4\}$, $\mathbf{N}_2 - \mathbf{N}^+ = \{2\}$; 若取 $\mathbf{N}_2 = \{3\}$, 则 $\mathbf{N}_1 = \{1, 2, 4\}$. 另外应预先说明, 本文定理中所取数集 $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_2$ 皆非空.

2 MPSD迭代法的敛散性定理

定义 对于 $n \times n$ 实矩阵 $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{M}$ 及 $\boldsymbol{N}$, 如果 $\boldsymbol{M}$ 非奇异, 并且有 $\boldsymbol{M}^{-1} \geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{N} \geqslant 0$, 则称 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$ 为矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的正规分裂.

收稿日期 2004-09-06
作者简介 陈恒新(1956-), 男, 副教授, 主要从事数值代数和矩阵计算的研究. E-mail: chenhx@hqu.edu.cn
基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(03QZR8)

引理1[2] 设 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{G}\geqslant 0$, 则 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}$ 非奇异且 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G})^{-1}\geqslant 0$ 的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{G})<1$.

引理2[2] 设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$ 为矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的正规分裂, 并且 $\boldsymbol{G}^{-1}\geqslant$, 则 $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N})<1$.

引理3[3] 设 $\boldsymbol{G}=[g_{ij}]\geqslant 0$ 为 $n\times n$ 矩阵, 则成立 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}g_{ij}\leqslant\rho(\boldsymbol{G})\leqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}g_{ij}$.

引理4[3] 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 且 $|\boldsymbol{B}|\leqslant\boldsymbol{A}$, 则 $\rho(\boldsymbol{B})\leqslant\rho(\boldsymbol{A})$.

定理1 设线性方程组(1)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵. 当 $0<\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}$, $0\leqslant\omega_1,\ \omega_2\leqslant\tau$ 时, 解方程组(1)的MPSD迭代法(2)收敛.

证明 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵, 则 $\rho(|\boldsymbol{B}|)<1$, 其中 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{L}|+|\boldsymbol{U}|$. $\boldsymbol{U}$ 为严格上三角矩阵, $\rho(\omega_2\boldsymbol{U})=0$, $\rho(\omega_2|\boldsymbol{U}|)=0$. 于是有 $|(\boldsymbol{I}-\omega_2\boldsymbol{U})^{-1}|=|\boldsymbol{I}+\omega_2\boldsymbol{U}+\omega_2^2\boldsymbol{U}^2+\cdots|\leqslant\boldsymbol{I}+\omega_2|\boldsymbol{U}|+\omega_2^2|\boldsymbol{U}|^2+\cdots=(\boldsymbol{I}-\omega_2|\boldsymbol{U}|)^{-1}$. 同理, 因 $\boldsymbol{L}$ 为严格下三角矩阵, 故 $|(\boldsymbol{I}-\omega_1\boldsymbol{L})^{-1}|\leqslant(\boldsymbol{I}-\omega_1)|\boldsymbol{L}|)^{-1}$. 于是有

$$|(\boldsymbol{I}-\omega_2\boldsymbol{U})^{-1}(\boldsymbol{I}-\omega_1\boldsymbol{L})^{-1}|\leqslant(\boldsymbol{I}-\omega_2)|\boldsymbol{U}|)^{-1}(\boldsymbol{I}-\omega_1)|\boldsymbol{L}|)^{-1}. \tag{4}$$

现记

$$\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}=(\boldsymbol{I}-\omega_1\boldsymbol{L})(\boldsymbol{I}-\omega_2\boldsymbol{U}), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}=[(1-\tau)\boldsymbol{I}+(\tau-\omega_1)\boldsymbol{L}+(\tau-\omega_2)\boldsymbol{U}+\omega_1\omega_2\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}]. \tag{6}$$

那么, 由式(3)知

$$\boldsymbol{S}_{\tau,\omega_1,\omega_2}=\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}, \tag{7}$$

令

$$\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}=(\boldsymbol{I}-\omega_1|\boldsymbol{L}|)(\boldsymbol{I}-\omega_2|\boldsymbol{U}|), \tag{8}$$

则由式(4), (5)有

$$0\leqslant|\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}^{-1}|\leqslant\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}^{-1}. \tag{9}$$

(i) 当 $0<\tau\leqslant 1$ 时, 因 $0\leqslant\omega_1,\ \omega_2\leqslant\tau$, 令

$$\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}=[(1-\tau)\boldsymbol{I}+(\tau-\omega_1)|\boldsymbol{L}|+(\tau-\omega_2)|\boldsymbol{U}|+\omega_1\omega_2|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{U}|], \tag{10}$$

可知 $\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}\geqslant 0$. 且有

$$|\boldsymbol{S}_{\tau,\omega_1,\omega_2}|=|\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}|\leqslant\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}. \tag{11}$$

由定义知 $\boldsymbol{T}_{\tau,\omega_1,\omega_2}=\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}-\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}$ 为正规分裂, 且 $\boldsymbol{T}_{\tau,\omega_1,\omega_2}=\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}-\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}=[\boldsymbol{I}-\omega_1|\boldsymbol{L}|-\omega_2|\boldsymbol{U}|+\omega_1\omega_2|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{U}|]-[(1-\tau)\boldsymbol{I}+(\tau-\omega_1)|\boldsymbol{L}|+(\tau-\omega_2)|\boldsymbol{U}|+\omega_1\omega_2|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{U}|]=\tau(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{B}|)$. 因 $|\boldsymbol{B}|\geqslant 0$, $\rho(|\boldsymbol{B}|)<1$, $0<\tau\leqslant 1$, 由引理1知 $\boldsymbol{T}_{\tau,\omega_1,\omega_2}^{-1}=\dfrac{1}{\tau}(\boldsymbol{I}-|\boldsymbol{B}|)^{-1}\geqslant 0$. 这样由引理2可得

$$\rho(\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2})<1. \tag{12}$$

所以, 由式(11), (12)并根据引理4, 便可得到 $\rho(\boldsymbol{S}_{\tau,\omega_1,\omega_2})\leqslant\rho(\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2})<1$, 即MPSD迭代法收敛.

(ii) 当 $1<\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}$ 时, 因 $0\leqslant\omega_1,\ \omega_2\leqslant\tau$, 令

$$\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}^{(2)}=[(\tau-1)\boldsymbol{I}+(\tau-\omega_1)|\boldsymbol{L}|+(\tau-\omega_2)|\boldsymbol{U}|+\omega_1\omega_2|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{U}|](\geqslant 0). \tag{13}$$

由式(6), (13)可知 $0\leqslant|\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}|\leqslant N_{\tau,\omega_1,\omega_2}^{(2)}$ 以及

$$|\boldsymbol{S}_{\tau,\omega_1,\omega_2}|=|M_{\omega_1,\omega_2}^{-1}N_{\tau,\omega_1,\omega_2}|\leqslant\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}^{-1}\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}^{(2)}. \tag{14}$$

由定义知 $\boldsymbol{T}_{\tau,\omega_1,\omega_2}^{(2)}=\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}-\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}^{(2)}$ 为正规分裂, 且

$$\boldsymbol{T}_{\tau,\omega_1,\omega_2}^{(2)}=\boldsymbol{M}_{\omega_1,\omega_2}-\boldsymbol{N}_{\tau,\omega_1,\omega_2}^{(2)}=(2-\tau)\boldsymbol{I}-\tau(|\boldsymbol{L}|+|\boldsymbol{U}|)=(2-\tau)[\boldsymbol{I}-\frac{\tau}{2-\tau}|\boldsymbol{B}|]. \tag{15}$$

因为 $1<\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}\leqslant 2$, 所以 $2-\tau>0$, 由 $1<\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}$, 有 $\tau(1+\rho(|\boldsymbol{B}|))<2$, $\tau\rho(|\boldsymbol{B}|)<2-\tau$, $\dfrac{\tau}{2-\tau}\rho(|\boldsymbol{B}|)<1$, 所以得

$$\rho(\frac{\tau}{2-\tau}|\boldsymbol{B}|)=\frac{\tau}{2-\tau}\rho(|\boldsymbol{B}|)<1. \tag{16}$$

因 $\dfrac{\tau}{2-\tau}|\boldsymbol{B}|\geqslant 0$. 于是, 由式(15), (16)并据引理1, 可知 $(\boldsymbol{T}_{\tau,\omega_1,\omega_2}^{(2)})^{-1}=\dfrac{1}{2-\tau}[\boldsymbol{I}-\dfrac{\tau}{2-\tau}|\boldsymbol{B}|]^{-1}\geqslant 0$. 再由引理

2, 可得 $\rho(M^{-1}_{\omega_1,\omega_2}N^{(2)}_{\tau,\omega_1,\omega_2})<1$. 所以, 由式(14)及此式据引理 4, 便得 $\rho(S_{\tau,\omega_1,\omega_2})\leqslant\rho(M^{-1}_{\omega_1,\omega_2}N^{(2)}_{\tau,\omega_1,\omega_2})<1$, 即此时 MPSD 迭代法也收敛. 证毕.

引理 5　对于任意的 $i\in\mathbf{N}_1$, $j\in\mathbf{N}_2$, 若 $i,j\in\mathbf{N}^-$, 则恒成立 $\gamma_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$.

证明　因为 $i,j\in\mathbf{N}^-$, 所以有 $\alpha_i+\beta_i=b_i<1$, $\alpha_j+\beta_j=b_j<1$. 那么, 有 $0\leqslant\beta_i<1-\alpha_i$ 和 $0\leqslant\alpha_j<1-\beta_j$, 于是 $\alpha_j\beta_i<(1-\alpha_i)(1-\beta_j)$. 从而, 有 $\gamma_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$.

定理 2　在方程组(1)矩阵 A 之 Jacobi 迭代阵 B 中任取一 $\mathbf{N}_1\subset\mathbf{N}^-$. 若 $i\in\mathbf{N}_1$, $j\in\mathbf{N}^+$ 成立 $\gamma_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$, 当 $0<\tau<\frac{2}{1+\rho(|B|)}$, $0\leqslant\omega_1,\omega_2\leqslant\tau$ 时, 解方程组(1)的 MPSD 迭代法(2)收敛.

证明　若 $\mathbf{N}_1=\mathbf{N}^-$ 则 $\mathbf{N}_2=\mathbf{N}^+$, 若 $\mathbf{N}_1\neq\mathbf{N}^-$ 则 $\mathbf{N}_2-\mathbf{N}^+\neq\emptyset$. 因 $i\in\mathbf{N}_1\subset\mathbf{N}^-$, 对 $j\in\mathbf{N}_2-\mathbf{N}^+$ 有 $b_j<1$, 即 $j\in\mathbf{N}^-$. 由引理 5 知 $\gamma_{ij}<1$, 据此及定理条件知对一切 $i\in\mathbf{N}_1$, $j\in\mathbf{N}_2$ 恒成立 $\gamma_{ij}<1$, 所以得 $0\leqslant\alpha_j\beta_i<(1-\alpha_i)(1-\beta_j)$, 又由 $\alpha_i+\beta_i=b_i<1$, 得 $0\leqslant\beta_i<(1-\alpha_i)$. 由此可知 $(1-\beta_j)>0$, 因此 $\beta_j<1$. 若 $\{i|\beta_i>0,\ i\in\mathbf{N}_1\}\neq\emptyset$, 则对于 $\mathbf{N}_1$ 中一切使 $\beta_i>0$ 的 i 有 $0\leqslant\frac{\alpha_j}{1-\beta_j}<\frac{1-\alpha_i}{\beta_i}$, 取 $\max\limits_{j\in\mathbf{N}_2}\frac{\alpha_j}{1-\beta_j}<h<\min\limits_{i\in\mathbf{N}_1,\beta_i>0}\frac{1-\alpha_i}{\beta_i}$. 否则, $\{i|\beta_i>0,\ i\in\mathbf{N}_1\}=\emptyset$, 即 $\beta_i\equiv0$, $i\in\mathbf{N}_1$, 则取 $\max\limits_{j\in\mathbf{N}_2}\frac{\alpha_j}{1-\beta_j}<h<+\infty$. 作 $H=\mathrm{diag}(h_i|h_i=h,\ i\in\mathbf{N}_2;\ h_i=1,\ i\in\mathbf{N}_1)$. 显然, H 为非负非奇异对角阵. 令 $B_1=H^{-1}BH=[b_{ij}^{(1)}]$, 则有 $b_{ij}^{(1)}=h_i^{-1}b_{ij}h_j$, $i,j\in\mathbf{N}$. 所以有

$$b_i^{(1)}=\alpha_i+h\beta_i=\begin{cases}\alpha_i<1, & \text{当 }\beta_i=0,\quad i\in\mathbf{N}_1,\\ \alpha_i+h\beta_i<\alpha_i+\frac{1-\alpha_i}{\beta_i}\beta_i=1, & \text{当 }\beta_i>0,\quad i\in\mathbf{N}_1,\end{cases}$$

$$b_j^{(1)}=\alpha_j+\frac{1}{h}\beta_j=\begin{cases}\beta_j<1, & \text{当 }\alpha_j=0,\quad j\in\mathbf{N}_2,\\ \alpha_j\frac{1}{h}\beta_j<\alpha_j\frac{1-\beta_j}{\alpha_j}+\beta_j=1, & \text{当 }\alpha_j>0,\quad j\in\mathbf{N}_2.\end{cases}$$

于是得 $\|B_1\|_\infty=\max\limits_{i\in\mathbf{N}}b_i^{(1)}<1$. 因为 $\||B_1|\|_\infty=\|B_1\|_\infty$, 所以 $\rho(|B_1|)\leqslant\||B_1|\|_\infty<1$. 由 $B_1=H^{-1}BH$, 有 $b_{ij}^{(1)}=h_i^{-1}b_{ij}h_j$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 又 $H=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)$ 中 $h_i>0$, 所以有 $|b_{ij}^{(1)}|=|h_i^{-1}b_{ij}h_j|=h_i^{-1}|b_{ij}|h_j$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 即又 $B_1=H^{-1}|B|H$, 则 $\rho(|B_1|)=\rho(|B|)$. 因此有 $\rho(|B|)<1$, 即矩阵 A 为非奇异 H–矩阵. 所以由定理 1 知, 当 $0<\tau<\frac{2}{1+\rho(|B|)}$, $0\leqslant\omega_1,\omega_2\leqslant\tau$ 时, 解方程组(1)的 MPSD 迭代法(2)收敛. 证毕.

注 1　因定理 2(以及下面的定理 3~5)中 $\mathbf{N}_1$ (或 $\mathbf{N}_1,\mathbf{N}_2,\mathbf{N}_2$ 等)可在 $\mathbf{N}^-$ (或 $\mathbf{N}^-,\mathbf{N}^+,\mathbf{N}^+$ 等)中任取, 所以该定理的应用性较广, 详见本文后面数值例子分析.

同理, 对列亦有如下相应定理 3.

定理 3　在方程组(1)矩阵 A 之 Jacobi 迭代阵 B 中任取 $\mathbf{N}_1\subset\mathbf{N}^-$. 若 $i\in\mathbf{N}_1$, $j\in\mathbf{N}^+$ 成立 $\gamma_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$, 当 $0<\tau<\frac{2}{1+\rho(|B|)}$, $0\leqslant\omega_1,\omega_2\leqslant\tau$ 时, 解方程组(1)的 MPSD 迭代法(2)收敛.

引理 6[1]　设线性方程组(1)的系数矩阵 A 不可约, 其 Jacobi 迭代矩阵 $B\geqslant0$ 且 $\rho(B)\geqslant1$. 当 $0<\omega_i<\tau\leqslant1$, $i=1,2$ 时, 有 $\rho(S_{\tau,\omega_1,\omega_2})\geqslant1$, 即解方程组(1)的 MPSD 迭代法(2)发散.

引理 7　对于任意的 $i\in\mathbf{N}_1$, $j\in\mathbf{N}_2$, 若 $i,j\in\mathbf{N}^+$, 且 $\alpha_i<1$, 则恒成立 $\gamma_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\geqslant1$.

证明　因为 $i,j\in\mathbf{N}^+$, 所以有 $\alpha_i+\beta_i=b_i\geqslant1$, $\alpha_j+\beta_j=b_j\geqslant1$. 又因 $\alpha_i<1$, 则有 $\beta_i\geqslant1-\alpha_i>0$ 和 $\alpha_j\geqslant1-\beta_j$, 于是有 $\alpha_j\beta_i\geqslant(1-\alpha_i)(1-\beta_j)$. 从而有 $\gamma_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\geqslant1$. 证毕.

定理 4　设线性方程组(1)矩阵 A 之 Jacobi 迭代矩阵 B 为不可约非负矩阵, 任取一 $\mathbf{N}_2\subset\mathbf{N}^+$, 使相应的 $\mathbf{N}_1$ 中一切 $\alpha_i<1(i\in\mathbf{N}_1)$. 若对 $i\in\mathbf{N}^-$, $j\in\mathbf{N}_3=\{j|\beta_j<1,\ j\in\mathbf{N}_2\}\neq\emptyset$, 成立 $\gamma_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\geqslant1$(当 $\mathbf{N}_3=\emptyset$, 该条件用 $\beta_i>0$, $i\in\mathbf{N}_1$ 替代). 那么, 当 $0<\omega_i<\tau\leqslant1$, $i=1,2$ 时, 解方程组(1)的 MPSD 迭代法(2)发散.

证明　若 $\mathbf{N}_2\neq\mathbf{N}^+$, 则 $\mathbf{N}_1-\mathbf{N}^-\neq\emptyset$, 因对 $i\in\mathbf{N}_1-\mathbf{N}^-$ 有 $\alpha_i<1$ 和 $b_i\geqslant1$, 即 $i\in\mathbf{N}^+$, 又 $i\in\mathbf{N}_3\subset\mathbf{N}_2\subset\mathbf{N}^+$, 由引理 7 知有 $\gamma_{ij}\geqslant1$. 若 $\mathbf{N}_2=\mathbf{N}^+$, 则 $\mathbf{N}_1=\mathbf{N}^-$. 据此及定理条件知对 $i\in\mathbf{N}_1$, $j\in\mathbf{N}_3\neq\emptyset$ 成立 $\gamma_{ij}=\alpha_i$

$+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\geqslant 1$. 从而得 $(1-\alpha_i)(1-\beta_j)\leqslant\alpha_j\beta_i$. 又 $\alpha_i<1$, $\beta_j<1$, 可知 $\alpha_j>0$, $\beta_i>0$, 于是有 $0<\dfrac{1-\alpha_i}{\beta_i}\leqslant\dfrac{\alpha_j}{1-\beta_j}$. 取 $0<\max\limits_{i\in\mathbf{N}_1}\dfrac{1-\alpha_i}{\beta_i}\leqslant h\begin{cases}\leqslant\min\limits_{j\in\mathbf{N}_3}\dfrac{\alpha_j}{1-\beta_j}, & \mathbf{N}_3\neq\approxeq\\ <+\infty, & \mathbf{N}_3\neq\approxeq\end{cases}$. 作 $\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}(h_i\mid h_i=h, i\in\mathbf{N}_2;\ h_i=1,\ i\in\mathbf{N}_1)$, $\mathbf{B}_1=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}=[b_{ij}^{(1)}]$, 则 $\boldsymbol{B}_1$ 仍为不可约非负矩阵, 且可推得 $\boldsymbol{B}_1$ 满足 $b_i^{(1)}\geqslant 1$, $i\in\mathbf{N}$. 由 $\boldsymbol{B}_1$ 之不可约非负性据引理 3 知 $\rho(\boldsymbol{B})=\rho(\boldsymbol{B}_1)\geqslant\min\limits_{i\in\mathbf{N}}b_i^{(1)}\geqslant 1$. 因 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}$ 不可约, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$ 亦不可约. 由引理 6 便得当 $0<\omega_i<\tau\leqslant 1$, $i=1,2$ 时, 解方程组(1)的 MPSD 迭代法(2)发散. 证毕.

同理, 对列亦有如下相应定理 5.

定理 5　设方程组(1)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 之 Jacobi 迭代阵 $\boldsymbol{B}$ 为不可约非负矩阵, 任取 $-\mathbf{N}_2\subset\mathbf{N}^+$ 使相应的 $\mathbf{N}_1$ 中一切 $\alpha_i<1\ (i\in\mathbf{N}_1)$. 若对 $i\in\mathbf{N}^-$, $j\in\mathbf{N}_3=\{j\mid\beta_j<1, j\in\mathbf{N}_2\}\neq\approxeq$ 成立 $\gamma_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\geqslant 1$ (当 $\mathbf{N}_3=\approxeq$, 该条件用 $\beta_i>0$, $i\in\mathbf{N}_1$ 替代). 当 $0<\omega_i<\tau\leqslant 1$, $i=1,2$ 时, 解式(1)的 MPSD 迭代法(2)发散.

3　数值例子

设线性方程组(1)中的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & -4 & 1 & 1\\ 6.3 & 14 & -2.8 & -4.2\\ 3 & 0.5 & -5 & -2.5\\ -2 & 2 & -1.5 & 5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & -0.1 & -0.1\\ -0.45 & 0 & 0.2 & 0.3\\ 0.6 & 0.1 & 0 & -0.5\\ 0.4 & -0.4 & 0.3 & 0\end{bmatrix},$$

有 $\|\boldsymbol{B}\|_\infty=1.2>1$, $\|\boldsymbol{B}\|_1=1.45>1$. 因为 $b_1=0.6<1$, $b_2=0.95<1$, $b_3=1.2>1$, $b_4=1.1>1$, 所以 $\mathbf{N}^-=\{1,2\}$, $\mathbf{N}^+=\{3,4\}$. 又因 $b_1=1.45>1$, $b_2=0.9<1$, $b_3=0.6<1$, $b_4=0.9<1$, 所以 $\mathbf{N}^-=\{2,3,4\}$, $\mathbf{N}^+=1$. 若直接取 $\mathbf{N}_1=\mathbf{N}^-$, $\mathbf{N}_2=\mathbf{N}^+$, 因 $\gamma_{23}=1.075>1$; 若取 $\mathbf{N}_1=\mathbf{N}^-$, $\mathbf{N}_2=\mathbf{N}^+$, 因 $\gamma_{12}=1.08>1$, 所以不能用本文定理判别解该方程组之 MPSD 法的敛散性. 但由于本文定理中的 $\mathbf{N}_1$(或 $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$, $\mathbf{N}_2$ 等)可在 $\mathbf{N}^-$(或 $\mathbf{N}^-$, $\mathbf{N}^+$, $\mathbf{N}^+$ 等)中任取, 所以其应用性较广. 如在本例中, 我们可取 $\mathbf{N}_1=\{1\}\subset\mathbf{N}^-$, 则 $\mathbf{N}_2=\{2,3,4\}$, $\alpha_1=0$, $\beta_1=0.6$; $\alpha_3=0.6$, $\beta_3=0.6$; $\alpha_4=0.4$, $\beta_4=0.7$. 于是, 对于 $i\in\mathbf{N}_1=\{1\}$, $j\in\mathbf{N}^+=\{3,4\}$ 成立 $\gamma_{13}=0.96<1$, $\gamma_{14}=0.94<1$. 所以由定理 2 知当 $0<\tau<\dfrac{2}{1+\rho(|\boldsymbol{B}|)}$, $0\leqslant\omega_1$, $\omega_2\leqslant\tau$ 时, 解此方程组之 MPSD 迭代法收敛.

参　考　文　献

1　陈恒新. MPSD 迭代法和 Jacobi 迭代法的敛散关系[J]. 应用数学与计算数学学报, 2000, 14(1): 1~8
2　瓦　格. 矩阵迭代分析[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1966. 57~125
3　胡家赣. 线性代数方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1997. 11~24

Convergene and Divergence Theorems of MPSD Iterative Method

Chen Hengxin
(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract　Some convergence and divergence theorems of MPSD iterative method are given here. These theorems can be easily tested. By applying them, convergence and divergence of MPAD iterative method suitable for solving linear equations $Ax=c$ can be fairly easily discriminated.

Keywords　linear equations, MPSD iterative method, convergence, divergence