第26卷　第2期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 26　No. 2
2005年4月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Apr. 2005

文章编号　1000-5013(2005)02-0117-04

中立型泛函微分方程概周期解的存在唯一性

王　全　义

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要　利用指数型二分性理论和不动点理论,建立一些保证一类具有限时滞的中立型泛函微分方程,论述其概周期期解的存在性和唯一性的充分条件.

关键词　中立型泛函微分方程, 概周期期解, 存在性, 唯一性

中图分类号　O 175.6　　　　**文献标识码**　A

文[1,2]研究如下的具有无穷时滞的算子型的中立型泛函微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - \int_{-\infty}^{t} B(t,s)x(s)ds\right) = A(t)x(t) + \int_{-\infty}^{t} C(t,s)x(s)ds + f(t) \tag{1}$$

的概周期解的存在性及唯一性等问题. 然对如下一类具有限时滞的非算子型的中立型泛函微分方程

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \dot{x}(t-\tau_2(t))) \tag{2}$$

的概周期解的存在性及唯一性,却很少有人研究过. 在式(2)中, $t\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}^n$; $A(t)=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$是$\mathbf{R}$上的$n\times n$概周期期函数矩阵; $f(t,x,y,z)$是$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^n$的连续函数,且关于$t$对$(x,y,z)\in D_1\times D_2\times D_3$(这里$D_i$是$\mathbf{R}^n$中的任一紧集)是一致概周期的; $\tau_i(t)$是$\mathbf{R}$到$[0,\tau]$的连续函数且是t的概周期函数, $i=1,2$. 本文将研究方程(2)的概周期期解的存在性及唯一性等问题. 利用指数型二分性及不动点方法,建立一些保证该方程的概周期期解的存在性和唯一性的充分条件.

1　主要结果

在本文中恒设P为n阶正定实对称常数方阵,并以r_M, r_m分别表示P的最大、最小特征根.

定义1　设$g(t)$ $(t\in\mathbf{R})$是概周期函数,则

$$g^+(t) = \frac{1}{2}[g(t) + |g(t)|] = \max(g(t),0) \geq 0,\qquad t\in\mathbf{R},$$

$$g^-(t) = \frac{1}{2}[g(t) - |g(t)|] = \min(g(t),0) \leq 0,\qquad t\in\mathbf{R}$$

都是t的概周期函数,且$g(t)=g^+(t)+g^-(t)$. 现在对于n阶正定实对称常数方阵P和$g(t)$定义如下两个函数为

$$L(t,g,P) = \frac{g^+(t)}{r_m} + \frac{g^-(t)}{r_M},\qquad t\in\mathbf{R},$$

$$L(t,-g,P) = -\left[\frac{g^+(t)}{r_M} + \frac{g^-(t)}{r_m}\right],\qquad t\in\mathbf{R}.$$

易见$L(t,g,P)$, $L(t,-g,P)$都是t的概周期函数. 对于n阶概周期函数矩阵$A(t)$,记$\lambda_M(t)$, $\lambda_m(t)$分别为$\frac{PA(t)+A^*(t)P}{2}$的n个特征根$\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\cdots$, $\lambda_n(t)$的最大及最小特征根. 这里$A^*(t)$为$A(t)$的转

收稿日期　2004-09-23

作者简介　王全义(1955-),男,教授,主要从事常微分方程及泛函微分方程的研究. E-mail: qywang@hqu.edu.cn

基金项目　国务院侨务办公室科研基金资助项目(01QZR02)

置. 显然,$\lambda_M(t)$, $\lambda_m(t)$都是 t 的概周期函数.

对于方程(2),假设存在下述条件. (A_1) 存在非负的概周期函数 $b(t)$,使得对 $\forall t\in\mathbf{R}$ 及 $\forall x_i, y_i, z_i \in\mathbf{R}^n$, $i=1,2$,都有

$$\|f(t,x_1,y_1,z_1)-f(t,x_2,y_2,z_2)\|\leq b(t)[\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|+\|z_1-z_2\|]. \tag{3}$$

(A_2) 存在着 n 阶正定实对称常数方阵 P,使得概周期函数 $L(t,\lambda_M,P)$ 的平均值

$$M[L(t,\lambda_M,P)]=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T L(\tau,\lambda_M,P)\,d\tau=-\alpha_1<0. \tag{4}$$

(A_3) 存在着 n 阶正定实对称常数方阵 P,使得概周期函数 $L(t,-\lambda_m,P)$ 的平均值为

$$M[L(t,-\lambda_m,P)]=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T L(\tau,-\lambda_m,P)\,d\tau=-\alpha_2<0. \tag{5}$$

(A_4) 存在着正常数 k,使得对 $\forall t\in\mathbf{R}$ 有

$$kL(t,\lambda_M,P)+b(t)\leq 0,\qquad (2k+2kA)\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}+2b<1, \tag{6}$$

其中 $L(t,\lambda_M,P)$ 由条件(A_2)给出, $b(t)$ 由条件(A_1)给出,且 $A=\sup\{\|A(t)\| \mid t\in\mathbf{R}\}$, $b=\sup\{b(t)\mid t\in\mathbf{R}\}$. ($A_5$) 存在着正常数 k,使得对 $\forall t\in\mathbf{R}$ 有 $kL(t,-\lambda_m,P)+b(t)\leq 0$, $(2k+2kA)\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}+2b<1$,其中 $L(t,-\lambda_m,P)$ 由条件(A_3)给出, $b(t)$ 由条件(A_1)给出, A, b 在条件(A_4)中给出.

定理 1 如果条件(A_1),(A_2),(A_4)成立,则方程(2)存在着唯一的概周期解.

推论 1 在定理 1 的条件下,且若 $A(t)$, $f(t,x,y,z)$, $\tau_i(t)$ $(i=1,2)$ 都是 t 的 T-周期函数,则方程(2)存在唯一的 T-周期解.

定理 2 如果条件(A_1),(A_3),(A_5)成立,则方程(2)存在着唯一的概周期解.

推论 2 在定理 2 的条件下,且若 $A(t)$, $f(t,x,y,z)$, $\tau_i(t)$ $(i=1,2)$ 都是的 T-周期函数,则方程(2)存在唯一的 T-周期解.

2 一些引理

本节先介绍一些有用的引理. 考虑如下概周期微分系统

$$x'=A(t)x, \tag{7}$$

$$x'=A(t)x+g_1(t). \tag{8}$$

这里 $t\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}^n$, $A(t)$ 是 n 阶概周期函数矩阵, $g_1(t)$ 是 n 维概周期函数向量. 记 $\frac{PA(t)+A^*(t)P}{2}$ 的 n 个特征根 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_n(t)$ 的最大、最小特征根,分别记为 $\lambda_M(t)$, $\lambda_m(t)$. 下面引理 1 是文[3]中的引理 2.1,引理 2 是文[4]中的引理 2.5,引理 3 是文[5]中的引理 3.

引理 1[3] 设 $X(t)$ 是方程(7)的基本解方阵,则有

$$\|X(t)X^{-1}(s)\|\leq\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}\exp\left(\int_s^t L(\tau,\lambda_M,P)\,d\tau\right),\qquad t\geq s, \tag{9}$$

$$\|X(t)X^{-1}(s)\|\leq\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}\exp\left(\int_s^t L(\tau,-\lambda_m,P)\,d\tau\right),\qquad t\leq s. \tag{10}$$

引理 2[4] 设 $a(t)$ 是概周期函数,若它的平均值 $M[a(t)]=-\alpha_0<0$,则存在正常数 α_1, β_1 使得

$$\exp\left(\int_s^t a(r)\,dr\right)\leq\beta_1\exp(-\alpha_1(t-s)),\qquad t\geq s. \tag{11}$$

引理 3[5] 对于方程(7),如果条件(A_2)(或(A_3))被满足,则方程(8)存在唯一的概周期解 $x(t)$,它可以表示为

$$x(t)=\int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s)g_1(s)\,ds, \tag{12}$$

或

$$x(t)=-\int_t^{+\infty}X(t)X^{-1}(s)g_1(s)\,ds. \tag{13}$$

3　定理的证明

3.1　定理 1 的证明

记 $B=\{v\mid v:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ 为概周期函数且 $\dot v(t)$ 也是概周期函数$\}$，对 $\forall v\in B$，定义 v 的范数为 $\|v\|=\|v\|_0+\|v\|_1$。这里 $\|v\|_0=\sup\{\|v(t)\|_0\mid t\in\mathbf{R}\}$，$\|v\|_1=\sup\{\|v(t)\|_1\mid t\in\mathbf{R}\}$，$\|v(t)\|_0=(\sum_{i=1}^n v_i^2(t))^{1/2}$，$\|v(t)\|_1=(\sum_{i=1}^n \dot v_i^2(t))^{1/2}$，则 B 在此范数下是一个Banach空间。对 $\forall v\in B$，由于 $v(t)$，$\dot v(t)$ 及 $\tau_i(t)\ (i=1,2)$ 都是 t 的概周期函数，故 $v(t-\tau_1(t))$ 及 $\dot v(t-\tau_2(t))$ 也都是 t 的概周期函数。从而 $f(t,v(t),v(t-\tau_1(t)),\dot v(t-\tau_2(t)))$ 也是 t 的概周期函数。对 $\forall v\in B$，考虑下列概周期微分系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x+f(t,v(t),v(t-\tau_1(t)),\dot v(t-\tau_2(t))).\tag{14}$$

由条件(A_2)及引理 3 可知，方程(14)存在唯一的概周期解。有

$$x_v(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(s)f(s,v(s),v(s-\tau_1(s)),\dot v(s-\tau_2(s)))\mathrm{d}s,\tag{15}$$

其中 $X(t)$ 是方程(7)的一个基本解方阵。于是，由式(14)，(15)可知 $x_v\in B$。现作映射 $F:B\to B$ 为

$$Fv(t)=x_v(t),\quad \forall v\in B.\tag{16}$$

下面证明 $F:B\to B$ 是一个压缩映射。首先对 $\forall u,v\in B$，有

$$Fu(t)=x_u(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(s)f(s,u(s),u(s-\tau_1(s)),\dot u(s-\tau_2(s)))\mathrm{d}s,\tag{17}$$

以及

$$Fv(t)=x_v(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(s)f(s,v(s),v(s-\tau_1(s)),\dot v(s-\tau_2(s)))\mathrm{d}s.\tag{18}$$

而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Fu(t))=\dot x_u(t)=A(t)Fu(t)+f(t,u(t),u(t-\tau_1(t)),\dot u(t-\tau_2(t))),\tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Fv(t))=\dot x_v(t)=A(t)Fv(t)+f(t,v(t),v(t-\tau_1(t)),\dot v(t-\tau_2(t))).\tag{20}$$

于是，由式(17)，(18)和定理的条件及引理 1，得

$$\begin{aligned}\|Fu(t)-Fv(t)\|_0\le&\int_{-\infty}^{t}\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}\exp\left(\int_s^t L(r,\lambda_M,P)\,dr\right)b(s)[\|u(s)-v(s)\|_0+\\&\|u(s-\tau_1(s))-v(s-\tau_1(s))\|_0+\|u(s-\tau_2(s))-v(s-\tau_2(s))\|_1]\mathrm{d}s\le\\&k\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}[2\|u-v\|_0+\|u-v\|_1].\end{aligned}\tag{21}$$

从而有

$$\|Fu-Fv\|_0\le k\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}[2\|u-v\|_0+\|u-v\|_1].\tag{22}$$

又由式(19)～(22)和定理的条件，可得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Fu(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Fv(t)\right\|_0\le& kA\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}[2\|u-v\|_0+\|u-v\|_1]+b[2\|u-v\|_0+\\&\|u-v\|_1]=2\left[kA\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}+b\right]\|u-v\|_0+\left(kA\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}+b\right)\|u-v\|_1.\end{aligned}\tag{23}$$

从而有

$$\|Fu-Fv\|_1\le2\left(kA\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}+b\right)\|u-v\|_0+\left(kA\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}+b\right)\|u-v\|_1.\tag{24}$$

再由式(22)及(24)，即得

$$\|Fu-Fv\|=\|Fu-Fv\|_0+\|Fu-Fv\|_1\le k_1\|u-v\|,\tag{25}$$

其中 $k_1\overset{\Delta}{=}2\left(k\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}+kA\sqrt{\frac{r_M}{r_m}}+b\right)<1$。由此可知 $F:B\to B$ 是一个压缩映射。因此由不动点定理可知，

存在唯一的一点 $x \in B$ 使得 $Fx(t) = x(t)$, $(t \in \mathbf{R})$. 此即

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t) X^{-1}(s) f(s, x(s), x(s-\tau_1(s)), \dot{x}(s-\tau_2(s))) ds. \tag{26}$$

再由式(26)的两边同时对 t 求导即知 $x(t)$ 为方程(2)的解,因此 $x(t)$ 为方程(2)的唯一概周期解. 定理 1 证毕.

3.2 推论 1 的证明

记 $B_1 = \{v | v: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ 是连续可微的 T-周期函数$\}$. 因为 $A(t)$ 是 t 的连续的 T-周期函数,所以如果 $X(t)$ 是方程(7)的一个基本解方阵,则 $X(t+T)$ 也是方程(7)的一个基本解方阵. 因此存在一个 n 阶非奇异常数方阵 C,使得

$$X(t+T) = X(t)C.$$

于是有

$$X(t+T)X^{-1}(s+T) = X(t)X^{-1}(s). \tag{27}$$

从而对 $\forall v \in B$,由式(15),(27)及推论的条件,得

$$\begin{aligned} x_v(t+T) &= \int_{-\infty}^{t+T} X(t+T)X^{-1}(s) f(s, v(s), v(s-\tau_1(s)), \dot{v}(s-\tau_2(s))) ds \overset{s=r+T}{=\!=\!=} \\ &\int_{-\infty}^{t+T} X(t+T)X^{-1}(r+T) f(r+T, v(r+T), v(r+ \\ &T-\tau_1(r+T)), \dot{v}(r+T-\tau_2(r+T))) dr = \\ &\int_{-\infty}^{t} X(t)X^{-1}(r) f(r, v(r), v(r-\tau_1(r)), \dot{v}(r-\tau_2(r))) dr = x_v(t). \end{aligned} \tag{28}$$

即 $x_v(t)$ 也是连续可微的 T-周期函数. 因此,当 $v \in B_1$ 时有 $x_v \in B_1$. 于是,由定理 1 的证明易见,只须把定理 1 的证明中的空间 B 换成空间 B_1,即知此时推论 1 的结论成立. 推论 1 证毕.

最后,定理 2 及推论 2 的证明分别类似于定理 1 及推论 1 的证明,此处证略.

参 考 文 献

1 杨喜陶,冯春华. 一类具有无穷时滞的中立型 Volterra 积分微分方程概周期解的存在唯一性[J]. 数学学报,1997,40(3):359～402

2 王全义. 一类中立型泛函微分方程的概周期解的存在唯一性与稳定性[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2002,23(3):222～228

3 王全义. 周期解的存在性、唯一性与稳定性[J]. 数学年刊,1994,15A (5):537～545

4 王全义. 概周期解的存在性、唯一性与稳定性[J]. 数学学报,1997,40 (1):80～89

5 方聪娜,王全义. 具时滞的泛函微分方程的概周期解[J]. 华侨大学学报(自然科学版),2004,25(3):247～250

Unique Existence of Almost Periodic Solutions to Neutral Type Functional Differential Equations with Finite Time-Delay

Wang Quanyi

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract By using theory of exponential type dichotomy and fixed point theory, the author establishes some sufficient conditions for ensuring existence and uniqueness of almost periodic solutions to neutral type functional differential equations with finite time-delay.

Keywords neutral type functional differential equation, almost periodic solution, existence, uniqueness