

$$g_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{当 } k = i, \quad k, i = l+1, l+2, \dots, B, \\ 0, & \text{当 } k \neq i, \quad k, i = l+1, l+2, \dots, B. \end{cases}$$

合并两项成为

$$\sum_{k=1}^B q_{ik} j_k = 0, \quad i = l+1, l+2, \dots, B. \quad (3)$$

式中 k 除代表独立电流支路外,还可以代表非独立电流支路.显然,式(3)可表示成矩阵形式

$$Qj = 0. \quad (4)$$

式中 j 是支路复电流密度 B 阶列矩阵, Q 就是独立割集 $(N-1) \times B$ 阶矩阵,它的元素 q_{ik} 表示为

$$q_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{表示支路 } k \text{ 属于独立割集 } C_i, \text{且方向一致,} \\ -1, & \text{表示支路 } k \text{ 属于独立割集 } C_i, \text{且方向相反,} \\ 0, & \text{表示支路 } k \text{ 属于独立割集 } C_i. \end{cases}$$

可见,式(3)中以 q_{ik} 为元素的矩阵 Q 就是独立割集矩阵,即

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{(2)} & \text{(3)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_{l+1} \\ C_{l+2} \\ \vdots \\ C_B \end{matrix} & \begin{bmatrix} q_{l+1,1} & q_{l+1,2} & \cdots & q_{l+1,l} & q_{l+1,l+1} & q_{l+1,l+2} & \cdots & q_{l+1,B} \\ q_{l+2,1} & q_{l+2,2} & \cdots & q_{l+2,l} & q_{l+2,l+1} & q_{l+2,l+2} & \cdots & q_{l+2,B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{B,1} & q_{B,2} & \cdots & q_{B,l} & q_{B,l+1} & q_{B,l+2} & \cdots & q_{B,B} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (5)$$

式中(1)是独立割集,(2)是独立电流支路,(3)是非独立电流支路.

2 支路电压与节点电压的变换关系^[5]

已知在独立回路电压方程组

$$\sum_{t=1}^B b_{kt} \dot{V}_t = 0, \quad k = N, N+1, \dots, B \quad (6)$$

中,(已用 \dot{V}_t 代替 \dot{V}_{kt} 表示 t 支路电压)所包含的支路电压 \dot{V}_t 的数目为 B ,提供的独立方程数目为 $B-N+1$.由此可知,在 B 个支路电压中,可由方程组解出 $B-N+1$ 个的未知量电压,或称非独立变量电压.余下的 $N-1$ 个支路电压则称独立变量电压.

又知,由 D 定理说明的 $N-1$ 条非独立变量电流支路并不形成任一闭合回路.它们不会受到 1 个闭合回路中各支路电压代数数和为零条件的约束,因而这 $N-1$ 条支路电压都应是彼此独立的.因此,有理由选取这 $N-1$ 条非独立变量电流支路的电压,为式(6)中的独立变量电压.而其余的 $B-N+1$ 条独立变量电流支路的电压为式(6)中的非独立变量电压.

引入独立变量电压和非独立变量电压的概念后,就可以把全部 B 个支路电压分为独立变量电压和非独立变量电压两组.它使前者编号为 $l+1, l+2, \dots, B$,后者编号为 $1, 2, \dots, l$.由于独立回路电压方程组(6)的每一个独立方程中仅包含一条独立变量电流支路 k ,因而也仅包含一条非独立变量电压的支路.于是,可以把独立回路电压方程组(6)写成以独立变量电压来决定支路电压中非独立变量电压的形式,即

$$\dot{V}_{kt} = - \sum_{i=l+1}^B b_{ki} \dot{V}_i, \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad (7)$$

式(7)用 \dot{V} 和 \dot{V}_i 分别代表支路电压和独立变量电压.

既然支路电压中的非独立变量电压 \dot{V}_k 可以用独立变量电压 \dot{V}_i 来表示,那么支路电压中的独立变量电压本身当然也可以用独立变量电压来表示,即

$$\dot{V}_k = - \sum_{i=l+1}^B b_{ki} \dot{V}_i, \quad k = l+1, l+2, \dots, B. \quad (8)$$

只不过,式中有

$$b_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i, \quad k, i = l+1, l+2, \dots, B, \\ 0, & k \neq i, \quad k, i = l+1, l+2, \dots, B. \end{cases}$$

现在合并式(7)和式(8),得到全部 B 个支路电压 \dot{V}_t 与选定的独立变量电压 \dot{V}_i 的关系为

$$\dot{V}_t = - \sum_{i=l+1}^B b_{ti} \dot{V}_i, \quad t = 1, 2, \dots, B. \quad (9)$$

式(9)的

$$b_{ti} = \begin{cases} 1, & t = i, \quad t, i = l+1, l+2, \dots, B, \\ 0, & t \neq i, \quad t, i = l+1, l+2, \dots, B. \end{cases}$$

独立节点数和独立割集数都等于式(9)右边的独立变量电压数. 如定义 $N-1$ 个独立节点相对参考节点的电压为节点电压, 以及定义独立割集中所对应的非独立电流支路的电压为割集电压. 式(9)右边的电压 \dot{V}_i 就代表节点电压或割集电压.

当式(9)右边展开只包含两项

$$\dot{V}_t = \dot{v}_\mu - \dot{v} \quad (10)$$

时, 表明 t 支路两端的节点为相邻的两个独立节点 μ 和 λ . 由此推知, \dot{v}_μ 和 \dot{v} 代表节点 μ 和 λ 的节点电压. 例如, 图 1 表示 1 个具有 3 条支路和两个独立节点的平面图. 图中支路 t 由节点 μ 至节点 λ . 当绕行 1 周时, 写出的 t 支路电压 \dot{V}_t 与其两端节点电压 \dot{v}_μ 和 \dot{v} 的关系. 引进 1 个系数 $C_{\mu t}$, 使它代表

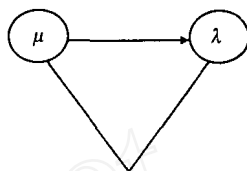


图 1 借助于节点电压 \dot{v}_μ 和 \dot{v} 来表示支路电压 \dot{V}_t

$$C_{\mu t} = \begin{cases} 1, & \text{表示支路 } t \text{ 离开节点 } \mu, \\ -1, & \text{表示支路 } t \text{ 进入节点 } \mu, \\ 0, & \text{表示支路 } t \text{ 与节点 } \mu \text{ 无关联.} \end{cases}$$

由于有了一个等于零的系数 $C_{\mu t} = 0$, 可以把独立节点 μ 和 λ 推广到所有 $N-1$ 个独立节点, 也可以把支路 t 推广到所有 B 个支路. 因此, 可把式(10)进一步写成各支路电压 \dot{V}_t 为所有节点电压 $\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dots, \dot{v}_{N-1}$ 的线性组合的一般形式

$$\dot{V}_t = \sum_{\mu=1}^{N-1} C_{\mu t} \dot{v}_\mu, \quad t = 1, 2, \dots, B. \quad (11)$$

由上式见到的第 1 个下标代表支路, 第 2 个下标代表独立节点. 因此

$$C_{\mu t} = a_{\mu t}, \quad t = 1, 2, \dots, B; \quad \mu = 1, 2, \dots, N-1. \quad (12)$$

可见, 式(11)中的系数矩阵是关联矩阵地倒置. 为了显示这一点, 把式(12)代入式(11), 得

$$\dot{V}_t = \sum_{\mu=1}^{N-1} a_{\mu t} \dot{v}_\mu, \quad t = 1, 2, \dots, B.$$

它与式(2)比较并写成紧凑形式为

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{v}}. \quad (13)$$

这就是能把支路电压变换成节点电压的关系式. 式中 $\dot{\mathbf{v}}$ 称为节点复电压列矩阵.

3 支路电压与割集电压的变换关系^[5]

当式(9)右边展开不止包含两项时, \dot{V}_i 代表第 i 独立割集 C_i 的割集电压. 于是, 式(9)表示各支路电压 \dot{V}_t 为所有割集电压 $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \dots, \dot{V}_{N-1}$ 的线性组合. 把式

$$q_{ik} = -b_{ki}, \quad k = 1, 2, \dots, l; \quad i = l+1, l+2, \dots, B, \quad (14)$$

代入式(9), 得

$$\dot{V}_t = \sum_{i=l+1}^B q_{ti} \dot{V}_i, \quad t = 1, 2, \dots, B. \quad (15)$$

它与式(5)比较后, 写成紧凑形式为

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{V}}. \quad (15)$$

这就是能把支路电压变换成割集电压的关系式.

4 割集电压与独立节点电压之间的关系

由支路电压与节点电压变换关系式(13), 以及支路电压与割集电压变换关系式(15), 可得

$$\mathbf{A}^T \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{V}}. \quad (17)$$

由本文的第 1 部分可知 \mathbf{A} 和 \mathbf{Q} 皆为 $(N-1) \times B$ 阶矩阵. 因此, 它们的转置皆为 $B \times (N-1)$ 阶矩阵, 所

以 A^T 和 Q^T 不存在逆矩阵. 式(17)即割集电压与独立节点电压之间的关系式.

5 验证示例

图 2 示出电路中 $R_1 = R_3 = R_6 = \frac{1}{2} ()$, $R_2 = R_5 = 1 ()$, $R_4 = \frac{1}{3} ()$. $U_1 = 2(V)$. 用节点法解得节点电压(V)为

$$v_1 = \frac{8}{7}, \quad v_2 = \frac{4}{7}, \quad v_3 = \frac{4}{7}. \quad (18)$$

支路电压(V)为

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= -\frac{8}{7}, & V_2 &= \frac{4}{7}, & V_3 &= \frac{4}{7}, \\ V_4 &= 0, & V_5 &= \frac{4}{7}, & V_6 &= \frac{4}{7} \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

割集电压(V)为

$$V_2 = \frac{4}{7}, \quad V_4 = 0, \quad V_5 = \frac{4}{7}. \quad (20)$$

由电路图容易得到 A 和 Q 的值 A 值和式(18)代入式(13), 并将 Q 值和式(20)代入式(16), 得到的支路电压值与式(19)完全相同. 因此, 本文的结论是正确的.

6 结束语

积分形式的两组独立方程组不仅给出上述的关联矩阵和独立割集矩阵, 而且还给出电压变换关系. 通过求得支路电压分别与独立节点电压和割集电压的关系, 最终求得割集电压与独立节点电压之间的关系. 现在已经很清楚地见到, 不论是对电网络的基本理论, 还是对电网络的矩阵分析, 积分形式的两组独立方程组都是一条不能忽视的最普遍地基本定律.

参 考 文 献

- 1 陈燊年, 王建成, 陈强顺. 电网络矩阵分析法的场论[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1993, 14(2): 159 ~ 168
- 2 陈燊年. 电网络基本方程的场论[J]. 电子学报, 1987, 15(2): 113 ~ 115
- 3 陈燊年. 用场论方法证明基尔霍夫定律独立方程的数目[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1985, 6(1): 33 ~ 41
- 4 陈燊年. 一个计算基本割集矩阵元素的新公式及应用[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1994, 15(3): 335 ~ 339
- 5 陈燊年, 陈思明, 王建成. 从麦克斯韦方程组建立的新电路理论[M]. 北京: 科学出版社, 1999. 26 ~ 184

Relation between Cutset Voltage and Independent Node Voltage

Xiang Fei Lin Jie Wang Jiancheng

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract Two independent equations in integral form of modern network field theory are taken as the source of our entire derivation and not any line graph is relied on. To begin with the concepts of incidence matrix and independent cutset matrix. And then, the relational expression between branch voltage and cutset voltage as well as relational expression between branch voltage and independent node voltage are obtained. And finally, the relation between cutset voltage and independent node voltage is derived. Moreover, an example is given for illustrating the correctness of the conclusion mentioned above.

Keywords branch voltage, cutset voltage, independent node voltage

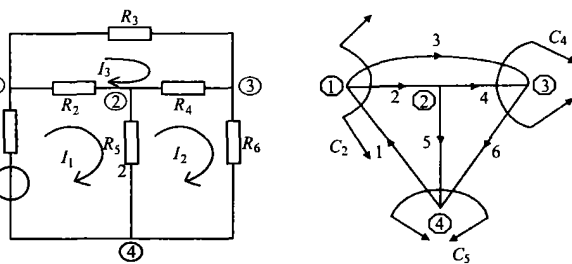


图 2 验证示例电路图