

几种常见信号波形的逆变换计算(I)

矩形脉冲与奇偶对称方波的逆变换

苏武浔 张渭滨 王建成

(华侨大学信息科学与工程学院, 福建 泉州 362021)

摘要 应用 Mobius 变换对 3 种常用数字信号的付立叶级数进行逆变换运算, 得到正、余弦函数及一般周期信号的数字信号展开. 求得在非正交数字信号基函数上的展开系数, 以及与展开基函数族相正交的非正交函数族.

关键词 Mobius 变换, 付立叶级数逆变换, 周期信号的数字信号展开, 相互正交的非正交函数族, 展开系数

中图分类号 O 411.1; TN 911.72

文献标识码 A

近年来, 我国著名学者陈难先教授等人使用无穷级数的 Mobius 反演公式, 解决了一系列重要的应用物理中的逆问题. 例如, 玻色体系逆问题^[1~5]、费米体系逆问题^[6, 7]、材料模拟计算^[8~12]和信号处理^[13]等. 开创了应用、推广数论中的 Mobius 变换解决物理学中各种逆问题的巧妙方法, 其工作在 1990 年当时就得到了世界著名的《NATURE》杂志的整版专评与高度评价^[14]. 本文即是把 Mobius 变换的方法应用于付立叶级数的逆变换运算, 得到正、余弦函数及一般周期信号的数字信号展开. 求得了与此数字展开函数族相正交的函数族, 以用于各展开系数的计算与信息的解调. 给出了矩形脉冲、奇对称与偶对称方波信号等逆变换计算结果.

1 矩形脉冲与偶对称方波的计算

1.1 矩形脉冲与偶对称方波的波形与傅立叶级数

(1) 矩形脉冲的波形(图 1)与傅立叶级数. 其傅立叶级数^[15]为

$$f(\omega) = \frac{E_1 \tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E_1 \tau \sin(n\omega \frac{\tau}{2})}{T n \omega \frac{\tau}{2}} \cdot \cos(n\omega \tau),$$

将函数写成

$$F(\omega) = f(\omega) - \frac{E_1 \tau}{T} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E_1 \tau \sin(n\omega \frac{\tau}{2})}{T n \omega \frac{\tau}{2}} \cdot \cos(n\omega \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \cos(n\omega \tau),$$

其中 $r(n) = \frac{2E_1 \sin(n\omega \frac{\tau}{2})}{n\pi} = \frac{2E_1 \sin(C\pi)}{n\pi}$, $0 < C\tau < 1$. (2) 偶对称方波的波形(图 2)与傅立叶级数其傅立叶级数^[15]为

收稿日期 2004-11-09

作者简介 苏武浔(1947-), 男, 副教授, 主要从事电路理论与通信工程的研究. E-mail: suwuxun@hqu.edu.cn

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(04QZR10)

$$f_{\text{es}}(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E_2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} \cdot \cos(n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\text{es}}(n) \cdot \cos(n\omega t),$$

其中 $r_{\text{es}}(n) = 2E_2 \sin(\frac{n\pi}{2})/n\pi$. 在图 1 中 T 为周期, τ 为脉冲宽度, $C_\tau = \frac{\tau}{T}$ 是占空比 ($0 < C_\tau < 1$), 脉冲幅度为 E_1 . 在图 2 中, 方波峰峰值为 E_2 , 正值 $\frac{E_2}{2}$, 负值 $-\frac{E_2}{2}$. 脉冲宽度为周期的一半, 即 $\tau = \frac{T}{2}$. 此波形为偶函数, 故付氏展开为余弦级数.

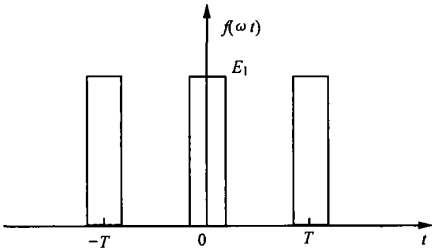


图 1 矩形脉冲的波形

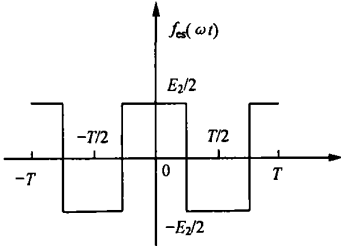


图 2 偶对称方波的波形

1.2 $\cos(\omega t)$ 对矩形脉冲或偶对称方波的逆变换

我们用 $F_{\text{even}}(\omega t)$ 来代表 $F(\omega t)$ 或者 $f_{\text{es}}(\omega t)$, 并设^[1] $\cos(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\text{even}}(n) F_{\text{even}}(\omega t)$. 那么, 有 $\cos(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\text{even}}(n) \sum_{m=1}^{\infty} r_{\text{even}}(m) \cos(mn\omega t)$. 令 $mn = k$, 有

$$\cos(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n:k} I_{\text{even}}(n) r_{\text{even}}\left(\frac{k}{n}\right) \right] \cos(k\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n:k} I_{\text{even}}(n) r_{\text{even}}\left(\frac{k}{n}\right) \right] \cos(k\omega t).$$

其中 $r_{\text{even}}(\frac{k}{n})$ 代表 $r(n)$ 或者 $r_{\text{es}}(n) \cdot \left[\sum_{n:k} I_{\text{even}}(n) r_{\text{even}}(\frac{k}{n}) \right]$ 的求和, 表示对每一个 k 中的多个整数因子 n 求和(包括 1 和 k). 由此可得 $\sum_{n:k} I_{\text{even}}(n) r_{\text{even}}(\frac{k}{n}) = \delta_{k1}$. 由上述公式, 可以递推解得 $I_{\text{even}}(n)$ 的各个值. 这样, 也就求出了 $\cos(\omega t)$ 按矩形脉冲或偶对称方波展开的逆变换式为

$$\cos(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\text{even}}(n) F_{\text{even}}(n\omega t).$$

下面, 我们给出开始的几个 $I_{\text{even}}(n)$ (也是一般的 Mobius 变换的系数 $I(n)$) 的计算公式为

$$\left. \begin{aligned} I(1) &= 1/r(1), \\ I(2) &= -I(1)r(2)/r(1) = -r(2)/r^2(1), \\ I(3) &= -I(1)r(3)/r(1) = -r(3)/r^2(1), \\ I(4) &= -[I(1)r(4) + I(2)r(2)]/r(1) = -r(4)/r^2(1) + r^2(2)/r^3(1), \\ I(5) &= -r(5)/r^2(1), \\ I(6) &= -[I(1)r(6) + I(2)r(3) + I(3)r(2)]/r(1) = [2r(2)r(3) - r(1)r(6)]/r^3(1), \\ I(7) &= -I(1)r(7)/r(1) = -r(7)/r^2(1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其余可以类推计算. 从以上可看出, 对于不等于 1 的素数 k , 则有 $I(k) = -r(k)/r^2(1)$. 而对于非素数 k , 则 $I(k)$ 的计算要麻烦一些. 但我们可用计算机进行编程运算, 得到 k 取任意正整数时的各个系数. 要注意的另一个问题是对于矩形脉冲的余弦展开, 余弦级数的角频率可趋向于很大. 但幅度已因为 $\frac{1}{n\omega}$ 而趋向无穷小了. 但对其逆变换, 即把 $\cos \omega t$ 展开为矩形脉冲时, 矩形脉冲的频率却不可能无限增大. 因为对于宽度为 τ 的矩形脉冲, 其最高频率 $f_{\text{max}} < 1/\tau$. 否则, 它就变成直流电平了. 因此, 在应用逆变换展开时, τ 的值与展开的最高频率要有适当的兼顾. 当然, 其前面的展开系数 $I(n)$ 的值也随着 n 的增加而迅速减少了. 而对于偶对称方波的余弦展开, 应考虑与矩形脉冲同样的问题.

1.3 一般偶函数对 $F_{\text{even}}(\omega t)$ (矩形脉冲或偶对称方波) 的展开

设对任意偶函数 $g(t) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cos n\omega t$, 有

$$G(t) = g(t) - G_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cos n\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \sum_{m=1}^{\infty} a(n) I_{\text{even}}(m) F_{\text{even}}(mn\omega t).$$

令 $mn = k$, $\sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{n:k} a(n) I_{\text{even}}(\frac{k}{n})] F_{\text{even}}(k\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} C(k) F_{\text{even}}(k\omega t)$, 其中

$$C(k) = \sum_{n:k} a(n) I_{\text{even}}(\frac{k}{n}).$$

逆变换系数 $C(k)$ 的一般形式是相同的, 只是后面的 $I(n)$ 是由不同的 $r(n)$ 计算得来的. 为得到进一步的结果, 引入如下的表达式, 即

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} \cos n\omega t \cos m\omega t d(\omega t) = \delta_{nm}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{mm} = 1.$$

$C(k)$ 则可以写为

$$C(k) = \sum_{n:k} a(n) I_{\text{even}}(\frac{k}{n}) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cos n\omega t [\sum_{m:k} I_{\text{even}}(\frac{k}{m}) \cos m\omega t] d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} G(t) \tilde{F}_k(\omega t) d(\omega t),$$

其中

$$\tilde{F}_k(\omega t) = \sum_{m:k} I_{\text{even}}(\frac{k}{m}) \cos m\omega t. \tag{2}$$

可以证明, $\tilde{F}_k(\omega t)$ 与 $F_{\text{even}}(\omega t)$ 是正交的, 即有 $\frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} F_{\text{even}}(l\omega t) \tilde{F}_k(\omega t) d(\omega t) = \delta_{k,l}$. 简述为

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} F_{\text{even}}(l\omega t) \tilde{F}_k(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} r_{\text{even}}(n) \cos nl\omega t [\sum_{m:k} I_{\text{even}}(\frac{k}{m}) \cos m\omega t] d(\omega t).$$

由余弦函数的正交性, 可知 $\frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} \cos nl\omega t \cos m\omega t d(\omega t) = \delta_{l,m}$, 故此式可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_{\text{even}}(n) \sum_{m:k} I_{\text{even}}(\frac{k}{m}) \delta_{l,m} = \sum_{\substack{m:k \\ nl=m}} r_{\text{even}}(\frac{m}{l}) I_{\text{even}}(\frac{k}{m}) = \sum_{\substack{m:k \\ T:l}} r_{\text{even}}(\frac{m}{l}) I_{\text{even}}(\frac{k/l}{m/l}) = \delta_{l,1}^k = \delta_{k,l}.$$

由此, 可证明 $\tilde{F}_k(\omega t)$ 与 $F_{\text{even}}(\omega t)$ 的正交性. 找到与 $F_{\text{even}}(\omega t)$ 正交的函数族 $\tilde{F}_k(\omega t)$ 是很重要的, 它可用于 $C(k)$ 的计算与对所携带信息的解调.

2 奇对称方波的计算

2.1 奇对称方波的波形与傅立叶级数

奇对称方波的波形如图 3 所示. 图中方波峰峰值为 E_3 , 正值 $\frac{E_3}{2}$, 负值 $-\frac{E_3}{2}$. 脉冲宽度为周期的一半, 即 $\tau = \frac{T}{2}$. 此波形为奇函数, 故付氏展开为正弦级数. 奇对称方波的傅立叶级数^[15]为

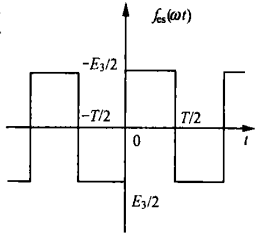


图 3 奇对称方波的波形

其中

$$r_{\text{os}}(n) = \frac{2E_3 \sin^2(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}. \tag{3}$$

2.2 $\sin(\omega t)$ 对奇对称方波的逆变换

现在, 我们来求 $\sin(\omega t)$ 的逆变换^[1]. 即设 $\sin(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\text{os}}(n) f_{\text{os}}(n\omega t)$, 那么就有 $\sin(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{\text{os}}(n) \sum_{m=1}^{\infty} r_{\text{os}}(m) \sin(mn\omega t)$. 令 $mn = k$, 有

$$\sin(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{n:k} I_{\text{os}}(n) r_{\text{os}}(\frac{k}{n})] \sin(k\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{n:k} I_{\text{os}}(n) r_{\text{os}}(\frac{k}{n})] \sin(k\omega t). \tag{4}$$

类似可得 $\sum_{n:k} I_{os}(n) r_{os}(\frac{k}{n}) = \delta_{k,l}$. 由此, 可递推解得 $I_{os}(n)$ 的各个值. 这样就求出了 $\sin(\omega t)$ 按奇对称方波展开的逆变换式为

$$\sin(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{os}(n) f_{os}(n\omega t). \tag{5}$$

展开时, 同样也要注意前述类似的问题.

2.3 一般奇函数对奇对称方波的展开

设对任意奇函数 $Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sin(n\omega t)$, 有 $Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sum_{m=1}^{\infty} I_{os}(m) f_{os}(mn\omega t)$, 令 $mn=k$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{n:k} b(n) I_{os}(\frac{k}{n})] f_{os}(k\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{os}(k) f_{os}(k\omega t)$. $C_{os}(k) = \sum_{n:k} b(n) I_{os}(\frac{k}{n})$, 可求得矩形脉冲展开系数的同样方法求解, 那么 $C_{os}(k)$ 可以写为

$$C_{os}(k) = \sum_{n:k} b(n) I_{os}(\frac{k}{n}) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sin n\omega t \int_{-\infty}^{\infty} I_{os}(\frac{k}{m}) \sin m\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} Q(t) \tilde{f}_{osk}(\omega t) d(\omega t), \tag{6}$$

其中 $\tilde{f}_{osk}(\omega t) = \sum_{m:k} I_{os}(\frac{k}{m}) \sin m\omega t$. 同样, 可以用类似的方法证明 $\tilde{f}_{osk}(\omega t)$ 与 $f_{os}(\omega t)$ 是正交的, 即有

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega t=0}^{2\pi} f_{os}(l\omega t) \tilde{f}_{osk}(\omega t) d(\omega t) = \delta_{kl}. \tag{7}$$

由求得的 $\tilde{f}_{osk}(\omega t)$, 可用于 $C_{os}(k)$ 的计算与对 $Q(t)$ 所携带信息的解调.

3 讨论

付立叶变换的基本函数族是正交的三角函数族, 一般周期函数的三角级数展开得到的是在此无穷维基函数上的各维分量. 应用 Mobius 变换对付立叶变换进行逆变换运算, 实际是把三角级数在各种数字信号基函数上进行展开. 很显然, 上述各种数字信号基函数集是非正交的, 或称为是斜正交的. 一般周期函数展开为各种数字信号基函数, 也就是在斜正交的各种数字信号基函数上进行展开而得到各维的分量. 假设这个一般的周期函数携带有某种信息, 要对此信息进行解调. 一种最简单的方法, 就是找到与此斜正交基函数族相正交的函数族. 文中对 $C(k)$ 的另一种表示的更重要目的, 就是要求得与各种数字信号基函数集相正交的函数族 $\tilde{F}_k(\omega t)$ 等, 以备今后的应用. 很显然地, 所求得的函数族 $\tilde{F}_k(\omega t)$ 也是非正交的, 即斜正交的. 但两个本身是斜正交的函数族却是互相正交的, 且 $\tilde{F}_k(\omega t)$ 的函数形式是很容易构成的.

由于一般周期函数的付立叶展开同时包含余弦与正弦级数项, 故我们同时进行了奇、偶对称方波的逆变换计算, 使一般的周期函数的展开能直接应用此处计算的结果.

对于付立叶变换, 数学分析已经证明, 对于任意的分段连续的周期函数 $f(x)$, 有下式成立(Parseval 等式)^[16]. $\int_{-l}^l [f(x)]^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx$, $f(x)$ 的周期是 $2l$. 在此等式的基础上, 可证明^[16], $f_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=0}^N b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$ 于 $N \rightarrow \infty$ 时平均收敛于周期函数 $f(x)$.

对一般周期函数 $f(x)$ 按数字信号基函数族的展开, 当展开项数趋向于无穷大时, 展开式的收敛性问题是需要另外加以讨论的. 本文在此先不作讨论.

4 初步结论

应用 Mobius 变换对付立叶变换进行逆变换计算的结果, 使我们找到了把一般周期信号展开为斜正交的数字信号基函数族的方法. 同时, 在对展开系数进行分析与计算的过程中, 求得了另一族与展开基函数族相正交的函数族. 此函数族本身也是斜正交的, 它不仅可用于展开系数的计算, 也为一般周期函数可能携带的信息的解调, 预示了其应用的前景.

对中国科学院院士、清华大学物理系陈难先教授的热情指导和有益讨论,藉此表示衷心感谢.

参 考 文 献

- 1 Chen Nanxian. Modified mobius inverse formula and its applications in physics[J]. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(11): 1 193~ 1 195
- 2 Chen Nanxian, Li Gyangying. Theoretical investigation on the inverse black body radiation problem[J]. IEEE T. Antenna. Propag., 1990, 38(8): 1 287~ 1 290
- 3 Rosu H. Mobius inverse problem for distorted black holes(II)[J]. Nuovo. Cimento., 1993, 108B(12): 1 333~ 1 339
- 4 Xie Tading, Goldsmith P F. A new method for analyzing IRAS data to determine the dust temperature distribution[J]. Astrophys. J., 1991, 371: 31~ 34
- 5 Wang Jieming. Temperature distribution of accretion disks in active galactic nuclei[J]. Astrophys. J., 1996, 469: 564~ 571
- 6 Chen Nanxian. Closed form solution for inverse problems of Fermi systems[J]. Phys. Rev., 1993, E48(2): 1 558~ 1 561
- 7 陈难先. Fermi 体系逆问题的一种新解法[J]. 自然科学进展, 2003, 13(5): 473~ 477
- 8 Chen Nanxian, Chen Zhaodou, Wei Yucuan. Multidimensional inverse lattice problem and a uniformly sampled arithmetic Fourier transform[J]. Phys. Rev., 1997, E55: R5~ R8
- 9 Ge Xijin, Chen Nanxian. Selective field evaporation in field ion microscopy for ordered alloys[J]. J. Appl. Phys., 1999, 85(7): 3 488~ 3 493
- 10 Chen Nanxian. Theoretical study on the phase stability, site preference, and lattice parameters for[J]. J. Phys: Condens Mat., 2001, 13(11): 2 727~ 2 736
- 11 Zhang Shuo, Chen Nanxian. Determination of the B1-B2 transition path in RbCl by Mobius pair potentials[J]. Philos. Mag., 2003, 83: 1 451~ 1 461
- 12 Zhang Shuo, Chen Nanxian. Ab initio interionic potentials for NaCl by multiple lattice inversion[J]. Phys. Rev., 2002, B66: 1 ~ 10
- 13 Wei Yucuan, Chen Nanxian. Square wave analysis[J]. J. Math. Phys., 1998, 39(8): 4 226~ 4 245
- 14 Maddox J. Mobius and problems of inversion[J]. Nature, 1990, 344(29): 377
- 15 张渭滨. 信号与线性系统[M]. 广州: 暨南大学出版社, 1998. 403~ 406
- 16 梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978. 107~ 109

Computing the Inverse Transform of Some Common Signal Waveforms (I)

The Inverse Transform of Rectangular Pulse and Square Wave with Even-Odd Symmetry

Su Wuxun Zhang Weibin Wang Jiancheng

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract The inverse transform of Fourier series of three digital signals in common use is operated by applying Moebius transformation. As its results, the authors obtain the expansions of sine, cosine and their general periodic signals into these digital signals, and solve the expansion coefficient on base function of non-orthogonal digital signal, and solve also the non-orthogonal function family which are perpendicular to the expanding base function family.

Keywords Moebius (Mobius) transformation, inverse transform of Fourier series, expansion of periodic signals into digital signals, non-orthogonal function family, expansion coefficient