第26卷 第1期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 26 No. 1
2005年1月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Jan. 2005

文章编号 1000-5013(2005)01-0031-04

区间数判断矩阵的最小二乘排序法

占济舟　　吕跃进

(广西大学数学与信息科学学院,广西 南宁 530004)

摘要 指出李梅霞的不确定型AHP中的一种新排序方法中拟最小偏差法的错误.从偏差的角度,给出区间数判断矩阵的最小二乘排序方法.最后,给出一个算例加以说明.

关键词 区间数判断矩阵,拟最小偏差法,最小二乘法

中图分类号 O 223 ∶O 241.5　　**文献标识码** A

在层次分析法(AHP)中采用同一准则下方案,进行两两比较的方法构造判断矩阵.由于信息量不足或方案不够完善等原因,专家往往把握不准而不能做出明确的判断.此时判断就有多种可能,于是产生了不确定型AHP.在现有的不确定型AHP中,有一种采用的是区间数标度,相应的判断矩阵以区间判断的形式给出.目前,国内很多学者对区间数判断矩阵的权重计算方法进行研究[1~5].例如,有特征根向量法[2],区间数对数最小二乘法[3],等等.文[1]提出拟最小偏差法,并研究此方法的一些性质.事实上,文[1]中构造的偏差 $d_{ij}=\frac{a_{ij}w_j}{a_{jj}w_i}+\frac{a_{ji}w_i}{a_{ii}w_j}-\frac{2}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}}$ 并非大于或等于0,这就导致了偏差函数 $F(W)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}d_{ij}$ 也并非 ≥ 0.从而,在理论上对这种排序方法产生了怀疑.本文在文[1]的基础上,从偏差的角度提出区间数判断矩阵的最小二乘法.给出该方法的具体算法,并以一示例加以说明.

1 基本概念及定理[1,2]

定义1 记 $a=[a^-,a^+]=\{x\,|\,a^-\leq x\leq a^+\}$,称 a 为一个区间数.下为区间数的运算定义.(1) $a+b=[a^-+b^-,\ a^++b^+]$. (2) $ab=[a^-b^-,\ a^+b^+]$, $\lambda a=[\lambda a^-,\lambda a^+](\lambda\geq 0)$. (3) $\frac{a}{b}=[\frac{a^-}{b^+},\frac{a^+}{b^-}]$, $\frac{1}{b}=[\frac{1}{b^+},\frac{1}{b^-}]$.上述运算应满足相应的交换律、结合律、分配律等性质.本文中,记 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$.

定义2 称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为区间数判断矩阵.如果对 $\forall i,j\in\Omega$,均有:(1) $a_{ij}=[a_{ij}^-,\ a_{ij}^+]$,且 $1/9\leq a_{ij}^-\leq a_{ij}^+\leq 9$;(2) $a_{ij}=\frac{[1,1]}{a_{ij}}$.

定义3 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一区间数矩阵,如果对 $\forall i,j,k\in\Omega$,均有:(1) $a_{ij}=\frac{[1,1]}{a_{ji}}$;(2) $a_{ij}a_{jk}=a_{jj}a_{ik}$.那么,称 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一致性区间数矩阵,且(1),(2)为一致性条件.

定义4 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正数字矩阵,如果对 $\forall i,j,k\in\Omega$.恒有 $a_{ij}a_{ik}=a_{jj}a_{ik}$.那么,称 A 为拟一致数字矩阵.

定理1 正数字矩阵 A 为拟一致矩阵的充要条件是存在向量 $W=[w_1,w_2,\cdots,w_n]^T$,使 $a_{ij}=a_{jj}\frac{w_i}{w_j}$ $\forall i,j\in\Omega$,其中 W 为 A 的右主特征向量.

收稿日期 2004-04-09
作者简介 占济舟(1982-),女,硕士研究生,主要从事预测与决策的研究.E-mail:zjz196759@sina.com
基金项目 广西大学科研基金资助项目(X032016)

定理 2 区间数判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为区间数一致性矩阵,其充要条件是 A^-,A^+ 都为拟一致数字矩阵. 这里,$A=[A^-,A^+]$,$A^-=(a_{ij}^-)_{n\times n}$,$A^+=(a_{ij}^+)_{n\times n}$.

定理 3 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为区间数一致性矩阵,x^-,x^+ 分别为 A^-,A^+ 属于其最大特征根,并且具有正分量的归一化特征向量. 那么 $W=[kx^-,mx^+]=[w_1,w_2,\cdots,w_n]^T$,满足 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$ 且 $A=(\frac{w_i}{w_j})_{n\times n}$ 的充要条件是 $k/m=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^+}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^-)^{-1}}$ 考虑到 k/m 的表达式及权重向量左右端点的对称性,可以取 $k=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^+)^{-1}}$,$m=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^-)^{-1}}$.

2 错误的分析[1]

文[1]中构造了拟偏差函数 $F(W)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}d_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_{ij}w_j}{a_{jj}w_i}+\frac{a_{ji}w_i}{a_{ii}w_j}-\frac{2}{(a_{ii}a_{jj})^{1/2}})$,并证明如下定理.

定理 4 函数 $F(W)$ 在 D 中有唯一最小值点 w^*,且 w^* 是方程组 $\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}w_j}{a_{jj}w_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ji}w_i}{a_{ii}w_j}$ 在 D 中的唯一解. 在对区间数判断矩阵求排序权重时,文[1]采取下述步骤. (1) 用上述拟最小偏差法分别对 A^-,A^+ 进行求解,得归一化向量 $W^-=[w_1^-,w_2^-,\cdots,w_n^-]^T$,$W^+=[w_1^+,w_2^+,\cdots,w_n^+]^T$. (2) 由 $A^-=(a_{ij}^-)_{n\times n}$,$A^+=(a_{ij}^+)_{n\times n}$ 计算 $k=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^+)^{-1}}$,$m=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^-)^{-1}}$. (3) 计算权重向量 $w^*=[kw^-,mw^+]$.

由区间数判断矩阵的定义 $a_{ij}=\frac{[1,1]}{a_{ji}}$,以及区间数的运算可以知道,$a_{ij}^-=\frac{1}{a_{ji}^+}$,$a_{ij}^+=\frac{1}{a_{ji}^-}$. 因此,$A^-$ 并非是一个正互反矩阵,即 $a_{ij}^-=\frac{1}{a_{ji}^-}$ 并非成立. 从而,在 A^- 中 $\frac{a_{ij}^-w_j^-}{a_{jj}^-w_i^-}+\frac{a_{ji}^-w_i^-}{a_{ii}^-w_j^-}\geq 2\sqrt{\frac{a_{ij}^-a_{ji}^-}{a_{jj}^-a_{ii}^-}}$,但并不一定大于或等于 $2\sqrt{\frac{1}{a_{jj}^-a_{ii}^-}}$;相反,多数情况为 $a_{ij}^-<a_{ij}^+$ 也即 $a_{ij}^-<\frac{1}{a_{ji}^-}$,$a_{ij}^-a_{ji}^-<1$,$2\sqrt{\frac{a_{ij}^-a_{ji}^-}{a_{jj}^-a_{ii}^-}}<2\sqrt{\frac{1}{a_{jj}^-a_{ii}^-}}$. 对 A^+ 有 $\frac{a_{ij}^+w_j^+}{a_{jj}^+w_i^+}+\frac{a_{ji}^+w_i^+}{a_{ii}^+w_j^+}\geq 2\sqrt{\frac{a_{ij}^+a_{ji}^+}{a_{jj}^+a_{ii}^+}}\geq 2\sqrt{\frac{a_{ij}^+/a_{ij}^-}{a_{jj}^+a_{ii}^+}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{a_{jj}^+a_{ii}^+}}$. 因此,对 A^+ 来讲,$d_{ij}\geq 0$,而对于 A^-,d_{ij} 却未必大于或等于 0.

所以,文[1]构造的偏差函数 d_{ij} 并非大于或等于 0,这就使得决策人员在决策过程中遇到麻烦. 正因为如此,本文从偏差的角度提出区间数判断矩阵的最小二乘法.

3 区间数判断矩阵最小二乘法排序原理

设区间数判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,$A^-=(a_{ij}^-)_{n\times n}$,$A^+=(a_{ij}^+)_{n\times n}$,$A^-$,$A^+$ 的排序向量 $W^-=[w_1^-,w_2^-,\cdots,w_n^-]^T$,$W^+=[w_1^+,w_2^+,\cdots,w_n^+]^T$,满足归一化约束条件 $\sum_{i=1}^{n}w_i^-=1$,$\sum_{i=1}^{n}w_i^+=1$.

根据定理 1,正数字矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 拟一致的条件是 $a_{ij}=a_{jj}\frac{w_i}{w_j}$,即 $\frac{a_{ij}}{a_{jj}}=\frac{w_i}{w_j}$. $W=[w_1,w_2,\cdots,w_n]$ 为 A 的右主特征向量. 然而,在通常情况下,A 是非拟一致的. 为此,引入偏差 $d_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i}{w_j}(i,j\in\Omega)$. 记 $D=\{W=[w_1,w_2,\cdots,w_n]^T|\ w_i>0,\sum_i w_i=1\}$. 同时,构造偏差函数

$$G(W)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i}{w_j})^2.$$

显然,$G(W)$ 愈小愈好. 因此,合理的排序向量 $\bar{w}$ 应使 $G(\bar{w})$ 最小. 由此,导出排序方法也称最小二乘法(LSM)为

$$\left.\begin{aligned}&\min G(W)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i}{w_j})^2\\&\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n}w_i=1.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

可以看出,LSM 是一个带约束的非线性最小二乘问题,传统的求解方法是借助于 Levenberg-Marquardt (阻尼最小二乘法) 或 Levenberg-Marquardt Fletcher 算法. 文[6]为克服传统求解方法的不足,提出了一种简洁的收敛迭代算法. 此处,我们仿照文[6]给出了区间数判断矩阵 LSM 的算法.

定理 5　偏差函数 $G(W)$ 在 D 中有最小值点 w^*,且 w^* 是下列方程组

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i}{w_j}\right)\frac{w_i}{w_j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}-\frac{w_j}{w_i}\right)\frac{w_j}{w_i},\qquad i,j\in\Omega \tag{2}$$

在 D 中的解. 关于 w^* 的存在性证明可参考文[7], w^* 不具有唯一性. 在此,仅证明 w^* 满足方程组(2).

证明　作拉格朗日函数为

$$L(W,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i}{w_j}\right)^2=\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}w_i-1\right). \tag{3}$$

令 $\frac{\partial L}{\partial w_i}=0$,得

$$-2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i}{w_j}\right)\frac{1}{w_j}+2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}-\frac{w_j}{w_i}\right)\frac{w_j}{w_i^2}+\lambda=0. \tag{4}$$

对式(4)两端同乘以 w_i,得

$$-2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i}{w_j}\right)\frac{w_i}{w_j}+2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}-\frac{w_j}{w_i}\right)\frac{w_j}{w_i}+\lambda w_i=0. \tag{5}$$

式(5)对 i 求和,得

$$-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i}{w_j}\right)\frac{w_i}{w_j}+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}-\frac{w_j}{w_i}\right)\frac{w_j}{w_i}+\lambda=0. \tag{6}$$

将式(6) i,j 对换,经比较得 $\lambda=0$,代入式(5)得

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i}{w_j}\right)\frac{w_i}{w_j}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}-\frac{w_j}{w_i}\right)\frac{w_j}{w_i}$$

成立. 故 w^* 是方程组(2)在 D 中的解. 仿照文[6]可以给出下列迭代算法. (1) 取定初始向量 $W(0)=(w_1[(0),w_2(0),\cdots,w_n(0)]^{\mathrm{T}}\in D$,给定迭代精度 ε,置 $k=0$. 可以取 $w_i(0)=\dfrac{\sum\limits_{j=1}\frac{a_{ij}}{a_{jj}}}{\sum\limits_{i,j=1}\frac{a_{ij}}{a_{jj}}}$. (2) 计算 $\eta_i(w(k))=\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{a_{ij}}{a_{jj}}-\frac{w_i(k)}{w_j(k)}\right)\frac{w_i(k)}{w_j(k)}-\left(\frac{a_{ji}}{a_{ii}}-\frac{w_j(k)}{w_i(k)}\right)\frac{w_j(k)}{w_i(k)}\right]$, $\forall i\in\Omega$ 恒有 $|\eta_i(w(k)|\le\varepsilon$ 成立, 算法终止, $w^*=w(k)$;反之,转(3). (3) 确定 m,使 $|\eta_m(w(k)|=\max\limits_{i\in\Omega}|\eta_i(w(k)|$,并令 $x_i(k)=\begin{cases}T(k)W_m(k), & i=m\\ W_i(k), & i\ne m\end{cases}$ 或 $x_i(k)=W_i(k)=\dfrac{x_i(k)}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j(k)}$,其中 $T(k)$ 为 $G(X(k))$ 的最小值点. 可以类似文[6]中的证明,说明 $T(k)$ 为下列四次方程的非负实根. 即

$$at^4+bt^3+ct+d=0, \tag{7}$$

其中 $a=\sum\limits_{j\ne m}\dfrac{w_m^2(k)}{w_j^2(k)}$, $b=-\sum\limits_{j\ne m}\dfrac{a_{mj}w_m(k)}{a_{jj}w_j(k)}$, $c=-\sum\limits_{j\ne m}\dfrac{a_{jm}w_j(k)}{a_{mm}w_m(k)}$, $d=-\sum\limits_{j\ne m}\dfrac{w_j^2(k)}{w_m^2(k)}$. 若式(7)的非负实根不唯一,则取偏差函数 $G(X(k))$ 达到最小的 t 值为 $T(k)$. 此外, $T(k)$ 也可由式 $t_0=1$ 或 $t_n=-\dfrac{bt_{n-1}^3+d}{at_{n-1}^3+c}>0$ 迭代求解,直至满足 $at^4+bt^3+ct+d\le\varepsilon$ 为止. (4) 令 $k=k+1$,转(2). 类似地可证明上述算法经有限步迭代后收敛,其证法可参考文[8]. 容易证明下面两个定理成立.

定理 6　当正数字矩阵 A 拟一致时,LSM 法与特征根法具有相同的排序权向量.

定理 7　当区间数判断矩阵 A 一致时,LSM 法与区间数特征根法给出相同的排序权向量. 于是得到下面求解区间数判断矩阵的排序方法,称之为区间数最小二乘法. (1) 用最小二乘法对 A^-, A^+ 进行求解,求得归一化向量 w^-, w^+. (2) 由 $A^-=(a_{ij}^-)_{n\times n}$, $A^+=(a_{ij}^+)_{n\times n}$ 计算 $k=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^+\right)^{-1}}$, $m=$

$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{-})^{-1}}$. (3) 计算权重向量 $w^{*} = [kw^{-}, mw^{+}]$.

4 算例

设区间数判断矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} [1,1] & [2,3] & [3,5] \\ [1/3,1/2] & [1,1] & [4,5] \\ [1/5,1/3] & [1/5,1/4] & [1,1] \end{bmatrix}, \quad A^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/2 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

由特征根法,可以计算出归一化特征向量为 $x^{-} = [0.5594, 0.3385, 0.1022]^{T}$, $x^{+} = [0.5765, 0.3178, 0.1057]^{T}$, $k = 0.4358$, $m = 0.5448$. 由 $w = [kw^{-}, mw^{+}]$,得 $w_1 = [0.2438, 0.3141]$, $w_2 = [0.1475, 0.1731]$, $w_3 = [0.0445, 0.0576]$. 利用最小二乘法,得 $x^{-} = [0.4452, 0.440, 0.1158]^{T}$, $x^{+} = [0.4985, 0.4086, 0.0929]^{T}$. 由 $W = [kw^{-}, mw^{+}]$,得 $w_1 = [0.1940, 0.2716]$, $w_2 = [0.1917, 0.2220]$, $w_3 = [0.0504, 0.0506]$. 通过比较,可以看出,最小二乘法与特征根法所得结果基本一致.

5 结束语

文[4]中指出,区间数判断矩阵的排序方法,可以沿用正互反判断矩阵中的排序方法. 文[1]正是将最小偏差法推广到区间数矩阵. 但是,值得一提的是在推广的过程中,必须注意区间数判断矩阵与正互反判断矩阵的区别与联系. 本文所构造的偏差函数 $G(W)$ 大于或等于 0. 因此,将最小二乘法推广到区间数判断矩阵当中,这是可行的.

参 考 文 献

1 李梅霞. 不确定型 AHP 中的一种新排序方法[J]. 洛阳大学学报(自然科学版), 2000, 15(4): 13~18
2 魏毅强, 刘进生, 王绪柱. 不确定型 AHP 中判断矩阵的一致性概念及权重[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 14(4): 16~22
3 魏翠萍, 侯成军. 不确定型 AHP 中几种新的排序方法及比较[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 1996, 22(2): 25~30
4 吴祈宗, 朱心想. 几种区间数判断矩阵排序权向量计算方法的比较研究[J]. 北京工商大学学报(自然科学版), 2002, 20(4): 53~57
5 刘进生, 魏毅强, 王绪柱. 区间数判断矩阵的建立及其权重计算[J]. 系统工程, 1993, 11(3): 42~46
6 王应明. AHP 中最小二乘排序方法及算法研究[J]. 应用数学与计算数学学报, 1997, 11(1): 1~9
7 王应明. 群组 AHP 中最小二乘排序方法及算法研究[J]. 系统工程与电子技术, 1997, 19(6): 76~80
8 将正新, 魏挹湘. 成对比较矩阵的一种逼近[J]. 北京航空航天大学学报(自然科学版), 1989, (3): 33~37

Least Square Method for Sequencing Judgement Matrix of Interval Numbers

Zhan Jizhou Lu Yuejin

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, 530004, Nanning, China)

Abstract The present work directs against the Li Meixia's work on quasi-least-deviation priority method in reference [1]. From the angle of biased deviation, the authors give here the method of least square for sequencing or ordering the judgement matrix of interval numbers and give a numerical example for its explanation.

Keywords judgement matrix of interval numers, quasi-least-deviation method, least square method