第 26 卷 第 1 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 26 No. 1
2005 年 1 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2005

文章编号 1000-5013(2005) 04-0027-04

Feigenbaum 方程的一类精确解的凹凸性

蔡耀雄 陈尔明

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 研究 Feigenbaum 方程的一类简单的精确解的性质, 它为分段分式线性函数. 采用分析的方法, 对其各段凹凸性进行充分讨论. 从而, 完成对其解曲线的整体凹凸性进行研究.

关键词 Feigenbaum 方程, 分段分式线性函数, 准确解, 单调性, 凹凸性

中图分类号 O 241.7 文献标识码 A

1 问题的提出

在动力系统的研究中, 为了解释众所周知的 Feigenbaum 现象[1], Feigenbaum 等人提出许多假设. 其中一个重要的假设为如下方程解的存在性的假设, 即

$$\left.\begin{aligned} &g(x) = -\frac{1}{\lambda}g(g(-\lambda x)), \qquad \lambda \in (0,1)(\text{待定}), \\ &g(0) = 1, \qquad g'(0) = 0, \qquad |g(x)| \leqslant 1, \qquad x \in [-1,1]. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

关于该函数方程的解的性质的研究, 已得到许多数学家和物理学家所关注, 并且得到了不少成果[2~5]. 如解的存在性、解的局部唯一性、连续可微性等, 并且建立了一些不同的构造方程(1)的解的方法. 文[2]更是将方程(1)转化为如下方程(2)进行研究, 即

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda}\varphi(\varphi(\lambda x)), \qquad \lambda \in (0,1)(\text{待定}), \\ &\varphi(0) = 1, \qquad \varphi'(0) = 0, \qquad |\varphi(x)| \leqslant 1, \qquad x \in [-1,1]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

通过构造方程(2)的递减连续解, 并令 $g(x) = \varphi(x)$, $x \in [0,1]$, 且 $g(x) = \varphi(-x) = 1$, $x \in [-1,0]$, 便可得到方程(1)的单峰偶解. 由对称性, 只要研究方程(2)便可很方便研究方程(1). 文[2]构造出方程(2)的一个准确解的解析表达式, 它为式(3)这种形式的分段分式线性函数, 即

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & x \in \Delta_k, \quad k = -1, 0, 1, 2, \cdots, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \tag{3}$$

$$\varphi_k(x) = \frac{a_k x + b_k}{c_k + d_k}, \qquad x \in \Delta_k, \quad k = -1, 0, 1, 2, \cdots, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a_k \\ c_k \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a_{k-1} \\ c_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b_k \\ d_k \end{bmatrix} = \lambda A\begin{bmatrix} b_{k-1} \\ d_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} \lambda(1-\lambda)^2 - \lambda^4 & \alpha \\ -\dfrac{\lambda^4}{\alpha} & 1 \end{bmatrix}, \qquad k = 1, 2, \cdots, \\ &\Delta_{-1} = [\alpha, 1], \qquad \Delta_k = [\lambda^{k+1}\alpha, \lambda^k\alpha], \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, \\ &a_0 = 1, \qquad b_0 = -\alpha, \qquad c_0 = \frac{\lambda}{\alpha}, \qquad d_0 = \lambda(1-\lambda) - 1, \\ &a_{-1} = 1, \qquad b_{-1} = -\alpha, \qquad c_{-1} = \frac{-\lambda^3}{\alpha}, \qquad d_{-1} = \lambda^3 - (1-\lambda)^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在式(5)中, 有

收稿日期 2004-05-17

作者简介 蔡耀雄(1979-), 男, 硕士研究生, 主要从事动力系统和分形几何的研究. E-mail: cai_yx@126.com

$$(\alpha,\lambda)\in l=\{(\lambda,\alpha)\mid 0<\lambda\leqslant 1-\sqrt{1-\alpha},\ \alpha^2+[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4-1]\alpha+\lambda^4=0,\ 0<\alpha<1\}. \tag{6}$$

由于该类解是迄今为止方程(1)的能用初等函数表示的最为简单形式的解,因而对其性质的研究显得尤为重要.该解的连续可微性在文[2]中已得到证明,但该解曲线的凹凸性并未得到证明.本文将通过分析的方法,对这一性质进行讨论.

2 相关引理

定义 1 设 f 为定义在 I 上的函数[6].若对 I 上任意两点 x_1, x_2 和任意的 $\lambda\in(0,1)$,总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 f 在 I 上为凸函数.反之,如果总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 f 在 I 上为凹函数.

引理 1 设 f 为 I 上的二阶可导函数[6],则 I 在上 f 为凸(凹)函数的充要条件是 $f''(x)\geqslant 0$, $f''(x)\leqslant 0$, $x\in I$.

引理 2 若 $\varphi(x)$ 为方程(2)的递减连续可微解[2],则满足如下两个条件.(1) 存在 α, $\lambda<\alpha<1$, $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\lambda\alpha)=\alpha$, $\lambda<\varphi(\lambda)<\alpha$.(2) $\varphi(1)=-\lambda$, $\varphi(\varphi(\lambda))=\lambda^2$, $\varphi'(\lambda\alpha)=-1$.

3 主要结果及其证明

定理 1 设 $\varphi(x)$ 为方程(2)的满足式(3)的递减连续解,则 $\varphi(x)$ 在 $\Delta_{-1}=[\alpha,1]$ 上为凸函数,在 $[0,\alpha]$ 上为凹函数.

在给出这个定理的证明之前,先给出两个有用命题.

(1) 命题 1.设 a_k, b_k, c_k, d_k 为式(4)定义的系数,则对任意的 $k=1,2,\cdots$,有 $a_k, c_k>0$, $b_k, d_k<0$,且 $\lambda a_k<\alpha c_k$, $\alpha d_k<\lambda b_k$.

证明. 当 $k=1$ 时,有

$$a_1=[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]a_0+\alpha c_0=\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4+\lambda=\lambda(1-\lambda)(2+\lambda^2)>0,$$

$$c_1=c_0-\frac{\lambda^4}{\alpha}a_0=\frac{\lambda}{\alpha}-\frac{\lambda^4}{\alpha}=\frac{\lambda}{\alpha}(1-\lambda^3)>0,$$

$$b_1=[\lambda^2(1-\lambda)^2-\lambda^5](-\alpha)+\lambda\alpha(\lambda(1-\lambda)-1)=-\lambda\alpha(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^3)<0,$$

$$d_1=\lambda d_0-\frac{\lambda^5}{\alpha}b_0=\lambda(\lambda(1-\lambda)-1)-\frac{\lambda^5}{\alpha}(-\alpha)=-\lambda(1-\lambda)(1+\lambda^2+\lambda^3)<0,$$

$$\lambda a_1=\lambda(1-\lambda)(2\lambda+\lambda^3)<\lambda(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^2)=\alpha c_1,$$

$$\alpha d_1=-\lambda\alpha(1-\lambda)(1+\lambda^2+\lambda^3)<-\lambda\alpha(1-\lambda)(\lambda+\lambda^2+\lambda^4)=\lambda b_1.$$

即当 $k=1$ 时,结论成立.

假设当 $k=m$ 时,命题成立.则当 $k=m+1$ 时,有

$$a_{m+1}[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]a_m+\alpha c_m>\lambda(1-\lambda)^2a_m+(\alpha c_m-\lambda a_m)\geqslant\lambda(1-\lambda)^2a_m>0, \tag{7}$$

$$c_{m+1}=c_m-\frac{\lambda^4}{\alpha}a_m=\frac{1}{\alpha}(\alpha c_m-\lambda^4a_m)>\frac{1}{\alpha}(\alpha c_m-\lambda a_m)>0, \tag{8}$$

$$b_{m+1}[\lambda^2(1-\lambda)^2-\lambda^5]b_m+\lambda\alpha d_m\leqslant\lambda^2(1-\lambda)^2b_m+\lambda^2b_m-\lambda^5b_m<\lambda^2(1-\lambda)^2b_m<0, \tag{9}$$

$$d_{m+1}=\lambda d_m-\frac{\lambda^5}{\alpha}b_m\leqslant\lambda d_m-\lambda^4d_m<0, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\lambda a_{m+1}-\alpha c_{m+1}&=[\lambda^2(1-\lambda)^2-\lambda^5]a_m+\lambda\alpha c_m-\alpha c_m+\lambda^4a_m<\\&[\lambda^2(1-\lambda)^2-\lambda^5+\lambda^4]\frac{\alpha}{\lambda}c_m+\alpha(\lambda-1)c_m=\\&\alpha c_m[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4+\lambda^3+(\lambda-1)]=-\alpha c_m(1-\lambda)^2(1+\lambda^2)<0,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\alpha d_{m+1}-\lambda b_{m+1}=\lambda\alpha d_m-\lambda^5b_m-\lambda^2\alpha d_m-\lambda^2[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]b_m<$$

$$\lambda(1-\lambda)\lambda b_m+[-\lambda^5-\lambda^3(1-\lambda)^2+\lambda^6]b_m=$$
$$\lambda^2 b_m[(1-\lambda)-\lambda^3-\lambda(1-\lambda)^2+\lambda^4]=\lambda^2(1-\lambda)^2(1+\lambda^2)b_m<0. \tag{12}$$

由归纳法可知, 结论成立.

(2) 命题 2. 设 a_k, b_k, c_k, d_k 为式(4)定义的系数, 则对任意的 $k=1,2,\cdots$, 有

$$\lambda^k\alpha c_k+d_k<\lambda^k\alpha a_k+b_k<0.$$

证明. 当 $k=1$ 时, 易得

$$\lambda\alpha a_1 b_1=\lambda\alpha[\lambda(1-\lambda)(2+\lambda)^2]-\lambda\alpha(1-\lambda)(1+\lambda+\lambda^3)]=-\lambda\alpha(1-\lambda)^2<0,$$

$$\lambda\alpha c_1+d_1=\lambda\alpha\frac{\lambda}{\alpha}(1-\lambda^3)-\lambda(1-\lambda)(1+\lambda^2+\lambda^3)=$$
$$\lambda(1-\lambda)[\lambda(1+\lambda+\lambda^2)-(1+\lambda^2+\lambda^3)]=-\lambda(1-\lambda)^2<0,$$
$$\lambda\alpha c_1+d_1-(\lambda\alpha a_1+b_1)=-\lambda(1-\lambda)^2(1-\alpha)<0.$$

假设当 $k=m$ 时, 命题成立. 那么, 当 $k=m+1$ 时, 有两种情况. (i) 记 $\lambda^k\alpha c_k+d_k\overset{\Delta}{=\!=}u$, $\lambda^k\alpha a_k+b_k\overset{\Delta}{=\!=}v$, 则有 $u<v<0$. 于是, 有

$$\lambda^{m+1}\alpha a_{m+1}+b_{m+1}=\lambda^{m+1}\alpha[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]a_m+\lambda^{m+1}\alpha^2c_m+[\lambda^2(1-\lambda)^2-\lambda^5]b_m+\lambda\alpha d_m=$$
$$\lambda\alpha(\lambda^m\alpha c_m+d_m)+\lambda[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4](\lambda^m\alpha a_m+b_m)=\lambda[\alpha u+[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]v]. \tag{13}$$

如果$[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]\geqslant 0$, 则显然

$$\lambda[\alpha u+[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]v]<0.$$

如果$[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]<0$, 由于$[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]>-\lambda^4$, 且由引理 2 知$\frac{\lambda^4}{\alpha}<1$, 所以

$$\lambda^{m+1}\alpha a_{m+1}+b_{m+1}=\lambda[\alpha u+[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]v]<\lambda(\alpha u-\lambda^4 v)<\lambda\alpha(u-v)<0 \tag{14}$$

(ii) 由引理 2, 易得$\frac{\lambda^4}{\alpha}<1$. 因此, 容易计算得

$$\lambda^{m+1}\alpha c_{m+1}+d_{m+1}=\lambda^{m+1}\alpha(c_m-\frac{\lambda^4}{\alpha}a_m)+\lambda d_m-\frac{\lambda^5}{\alpha}b^m=\lambda(\lambda^m\alpha c_m+d_m)-$$
$$\frac{\lambda^5}{\alpha}(\lambda^m\alpha d_m+b_m)=\lambda(u-\frac{\lambda^4}{\alpha}v)<\lambda(u-v)<0. \tag{15}$$

$$\lambda^{m+1}\alpha c_{m+1}+d_{m+1}-(\lambda^{m+1}\alpha a_{m+1}+b_{m+1})=\lambda^{m+1}\alpha(c_m-\frac{\lambda^4}{\alpha}a_m)+\lambda d_m-\frac{\lambda^5}{\alpha}b_m-$$
$$\{\lambda^{m+1}\alpha[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]a_m+\lambda^{m+1}\alpha^2c_m+[\lambda^2(1-\lambda)^2-\lambda^5]b_m+\lambda\alpha d_m\}=$$
$$\lambda(\lambda^m\alpha(c_m+d_m)-\frac{\lambda^5}{\alpha}(\lambda^m\alpha a_m+b_m)-\lambda\alpha(\lambda^m\alpha c_m+d_m)-\lambda[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4](\lambda^m\alpha a_m+b_m)=$$
$$\lambda(1-\alpha)u-\{\frac{\lambda^5}{\alpha}+\lambda[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4]\}v. \tag{16}$$

又因为由式(6)知

$$\alpha^2+[\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4-1]\alpha+\lambda^4=0\Rightarrow\lambda(1-\lambda)^2-\lambda^4=1-\alpha-\frac{\lambda^4}{\alpha},$$

所以

$$\lambda^{m+1}\alpha c_{m+1}+d_{m+1}-(\lambda^{m+1}\alpha a_{m+1}+b_{m+1})=\lambda(1-\alpha)u-\lambda(\frac{\lambda^4}{\alpha}+1-\alpha-\frac{\lambda^4}{\alpha})v=$$
$$\lambda(1-\alpha)(u-v)<0. \tag{17}$$

综上可知, 命题结论成立.

证明　显然对 $\varphi_k(x)$ 求导可得

$$\varphi'_k(x)=\frac{a_kd_k-b_kc_k}{(c_kx+d_k)^2},\quad \varphi''_k(x)=$$
$$-2(a_kd_k-b_kc_k)c_k\frac{1}{(c_kx+d_k)^3},\qquad k=-1,0,1,2,\cdots. \tag{18}$$

(i) 当 $x\in\Delta_{-1}=[\alpha,1]$ 时,将式(5)的已知条件代入式(7),得

$$\varphi''_{-1}(x)=-2(a_{-1}d_{-1}-b_{-1}c_{-1})c_{-1}\frac{1}{(c_{-1}x+d_{-1})^3}=\frac{-2\lambda^3(1-\lambda)^2}{\alpha(c_{-1}x+d_{-1})^3}. \tag{19}$$

令

$$h_{-1}(x)=c_{-1}x+d_{-1}=-\frac{\lambda^3}{\alpha}x+\lambda^3-(1-\lambda)^2, \tag{20}$$

则由单调性可以得到

$$h_{-1}(x)\leqslant h_{-1}(\alpha)=-(1-\lambda)^2<0.$$

所以, $\varphi''(x)>0$, 即当 $x\in\Delta_{-1}=[\alpha,1]$ 时, $\varphi(x)$ 为凸函数. (ii) 当 $x\in[0,\alpha]$ 时, 记 $A\overset{\Delta}{=\!=}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$. 由式(5)知, 当 $k=0$ 时, 有

$$a_0d_0-b_0c_0=\lambda(1-\lambda)-1+\lambda=-(1-\lambda)^2<0. \tag{21}$$

当 $k=1,2,\cdots$ 时, 有

$$\begin{aligned}a_kd_k-b_kc_k&=\lambda[bc(b_{k-1}c_{k-1}-a_{k-1}d_{k-1})+ad(a_{k-1}d_{k-1}-b_{k-1}c_{k-1})]=\\&\lambda(ad-bc)(a_{k-1}d_{k-1}-b_{k-1}c_{k-1})\end{aligned} \tag{22}$$

因为 $ad-bc=\lambda(1-\lambda)^2$, 所以递推可得对任意的 $k=0,1,2\cdots$, 时有

$$a_kd_k-b_kc_k=\lambda^{2k}(1-\lambda)^{2k}(a_0d_0-b_0c_0)=-\lambda^{2k}(1-\lambda)^{2(k+1)}<0, \tag{23}$$

因而

$$\varphi''_k(x)=2\lambda^{2k}(1-\lambda)^{2(k+1)}\frac{c_k}{(c_kx+d_k)^3}. \tag{24}$$

记 $h_k(x)=c_kx+d_k$, $x\in\Delta_k$, 再由命题1可知 $c_k>0$, 所以由单调性和命题2可得

$$h_k(x)\leqslant h_k(\lambda^k\alpha)=\lambda^k\alpha c_k+d_k<0. \tag{25}$$

于是, 立即有 $\varphi''_k(x)<0$. 即当

$$x\in\Delta_k=[\lambda^{k+1}\alpha,\lambda^k\alpha]$$

时, $\varphi(x)$ 为凹函数. 显然由引理2, $0<\lambda<\alpha<1$, 所以 $\lambda^k\alpha\to0$(当 $k\to\infty$时). 由文[2]知 $\varphi(x)$ 是连续可微, 所以当 $x\in[0,\alpha]$ 时, $\varphi(x)$ 为凹函数. 证毕.

参 考 文 献

1 Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformation[J]. Stat. Phys., 1978, 19. 25~28

2 陈芳跃. Feigenbaum 重正化群方程的准确解[J]. 高校应用数学学报(A辑), 1996, (11): 387~392

3 杨 路, 张景中. 第二类 Feigenbaum 函数方程[J]. 中国科学(A辑), 1985, 15(12): 1 061~1 069

4 廖公夫. 第二类 Feigenbaum 函数方程的单谷扩充连续解[J]. 数学年刊(A辑), 1988, 9(6): 649~654

5 唐元生. Feigenbaum 函数方程的单峰偶解[J]. 青岛大学学报(自然科学版), 1994, 7(1): 29~35

6 华东师范大学数学系编. 数学分析[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2001. 148~153

Concavity-Convexity of a Class of Accurate Solutions to Feigenbaum Functional Equation

Cai Yaoxiong Chen Erming

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract A study is made on the property of a class of simple and accurate solutions to Feigenbaum functional equation, which is piecewisely and fractionally linear function. By adopting analytical method, the authors fully discuss the concavity-convexity of its each piece; and thus accomplish the study of the global concavity-convexity of its solution curve.

Keywords Feigenbaum functional equation, piecewisely and fractionally linear function, accurate solution, monotonicity, concavity-convexity