文章编号 1000-5013(2005)01-0016-03

一个特殊自相似分形集的 Hausdorff 测度的上界估计

李 浩 陈尔明

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 利用自相似分形的性质,得到了一个特殊分形 Haudorff 测度的上界估计公式. 并应用此公式,通过构造特殊覆盖,得到它的 Hausdorff 测度的一个较好上界.

关键词 自相似分形集, δ覆盖,基本正方形, Hausdorff 测度

中图分类号 O 174.12 **文献标识码** A

对于分形几何的研究,分形集的 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度的计算是极其重要和有意义的研究方向. 然而,到目前为止,人们仅对满足开集条件的自相似集和准自相似集的研究较为成功. 文[1],[2]分别对经典的自相似集 Koch 曲线、Sierpinski 垫片和 Sierpinski 地毯进行了基础性的研究,并得出其 Hausdorff 测度上限的估计值. 文[3]又对文[4,1]的结果作了改进. 本文针对文[5]中所介绍的一个特殊分形集进行了较细致的考查,利用自相似集的性质建立它的 Hausdorff 上界的估计公式. 同时应用此公式,计算了一个较好的 Hausdorff 上界.

1 分形集的构造

取边长为1的正方形,将边长4等分. 取4个角上边长为1/4的4个小正方形,以及中间部分边长为1/2的一个小正方形,为第一次变换后图形(图1). 同理,对各个部分进行压缩变换,依次迭代下去即得

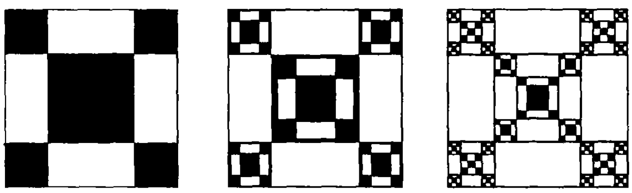

图1 分形的迭代

所需分形. 此分形的特殊性在于它具有两个不同的相似压缩比. 由文[5]所述关于自相似集维数的结论知,此分形的 Hausdorff 维数满足方程 $4(\frac{1}{4})^s+(\frac{1}{2})^s=1$. 从而, 可解得 $s=\log_2\frac{\sqrt{17}+1}{2}\approx 1.357$.

2 记号及一些引理

我们记正方形第 n 次压缩变换后所得图形为 F_n,最终所得分形为 F,则有 $F=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n$. 我们称第 n 次压缩变换后生成的新正方形为 F_n 的基本正方形,记为 $\square_n$. 下面研究前几次变换,得到基本正方形的个数及形状规律. 即经第1,2,3,4,…次变换后的基本正方形个数及其形状规律,分别为

收稿日期 2004-03-24

作者简介 李 浩(1979-),男,硕士研究生,主要从事分形几何和动力系统的研究. E-mail: llihhao@163.com

$$4\times\frac{1}{2^2}-\square,\quad 1\times4^0\times\frac{1}{2}-\square,\quad 4^2\times\frac{1}{2^4}-\square,\quad 2\times4^1\times\frac{1}{2^3}-\square,\quad 1\times4^0\times\frac{1}{2^2}-\square$$

$$4^3\times\frac{1}{2^6}-\square,\quad 3\times4^2\times\frac{1}{2^5}-\square,\quad 3\times4^1\times\frac{1}{2^4}-\square,\quad 1\times4^0\times\frac{1}{2^3}-\square,$$

$$4^4\times\frac{1}{2^8}-\square,\quad 4\times4^3\times\frac{1}{2^7}-\square,\quad 6\times4^2\times\frac{1}{2^6}-\square,\quad 4\times4^1\times\frac{1}{2^5}-\square,\quad 1\times4^0\times\frac{1}{2^4}-\square,\quad \cdots,$$

其中 $\frac{1}{2^i}-\square$表示边长为$\frac{1}{2^i}$的正方形. 例如, $4^2\times\frac{1}{2^4}-\square$表示 4^2 个边长为$\frac{1}{2^4}$的正方形, $4\times4^3\times\frac{1}{2^7}-\square$表示 4×4^3 个边长为$\frac{1}{2^7}$的正方形. 式中第 n 次的基本正方形,按照边长从小到大而从左至右排列,记为 $\square_n^0$, $\square_n^1$, $\cdots$, $\square_n^n$. 可总结出规律,第 n 次变换后, F_n 中的基本正方形情况为

$$C_n^0\times4^n\times\frac{1}{2^{2n}}-\square,\quad C_n^1\times4^{n-1}\times\frac{1}{2^{2n-1}}-\square,\quad \cdots,\quad C_n^{n-1}\times4^1\times\frac{1}{2^{n+1}}-\square,\quad C_n^n\times4^0\times\frac{1}{2^n}-\square$$

我们发现基本正方形有以下两个特点. (1) F_n 比 F_{n-1}的基本正方形的类型更多. (2) 各种类型的基本正方形的数量具有显著变化,但也有一定规律. 正是这两点造成了在讨论时与具有单一相似比的分形不同的困难.

引理 1[4]　$H^s(F)=\sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^s+\varepsilon_\alpha$, 其中 $\alpha:\{U_i,\ i\geq0\}$为 F 的δ覆盖, ε_α为误差.

引理 2[1]　设 $\delta>0$, $H^s(F)=H^s_\delta(F)$.

引理 3　用公式表示为

$$H^s\left(\frac{1}{2^{2n}}F\right)=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{2n}}H^s(F)=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{2n}}\left(\sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^s+\varepsilon_\alpha\right)=$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{2n}}\sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^s+\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{2n}}\varepsilon_\alpha.$$

即其相似压缩加细的误差分布均匀.

引理 4　$H^s(F)\leq\sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^s$.

证明　由 $H^s_\delta(F)$的定义及引理 2 易得.

3　上界估计公式及其应用

定理 1　设 U 是包含 F_n 中基本正方形 $\square_n^0 m_0$ 个, $\square_n^1 m_1$ 个, $\cdots$, $\square_n^n m_n$ 个的可测集. 则有

$$H^s(F)\leq\frac{|U|^s}{1-\sum_{i=0}^{n}(C_n^i\times4^{n-i}-m_i)/\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{2n-i}}. \tag{1}$$

证明　设 $\alpha=\{U_i,\ i\geq0\}$是 F 的一个覆盖,误差估计为 ε_α,则据引理 1 有 $H^s(F)=\sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^s+\varepsilon_\alpha$. 而 $\frac{1}{2^{2n}}\alpha$构成$\frac{1}{2^{2n}}F$的覆盖, $\{U,\ C_n^0\times4^n-m_0$ 个$\frac{1}{2^{2n}}\alpha$, $C_n^1\times4^{n-i}-m_1$ 个$\frac{1}{2^{2n-1}}\alpha$, $\cdots$, $C_n^n\times4^0-m_n$ 个$\frac{1}{2^n}\alpha\}$构成 F 的覆盖. 那么,据引理 4,有

$$H^s(F)\leq|U|^s+(C_n^0\times4^n-m_0)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n}}|U_i|\right)^s+(C_n^1\times4^{n-1}-m_1)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}|U_i|\right)^s+\cdots+$$

$$(C_n^{n-1}\times4^1-m_{n-1})\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n+1}}|U_i|\right)^s+(C_n^n\times4^0-m_n)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}|U_i|\right)^s=$$

$$|U|^s+\frac{C_n^0\times4^n-m_0}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{2n}}\sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^s+\cdots+\frac{C_n^n\times4^0-m_n}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{n}}\sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^s=$$

$$|U|^s+\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i\times 4^{n-i}-m_i}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{2n-i}}\right)\sum_{i=0}^{\infty}|U_i|^s=|U|^s+\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i\times 4^{n-i}-m_i}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{2n-i}}\right)(H^s(F)-\varepsilon_\alpha).$$

可选择适当的 α,使得 $|\varepsilon_\alpha|$ 充分小,因此有

$$H^s(F)\leqslant|U|^s+\sum_{i=0}^{n}\frac{C_n^i\times 4^{n-i}-m_i}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^{2n-i}}H^s(F).$$

整理即得定理所需结果.

根据引理 4 及应用上文中的估计公式,我们可得到以下结果.

定理 2 上界的粗糙估计, $H^s(F)\leqslant 1.600\,5$.

证明 显然, F_1 中的基本正方形构成 F 的一个覆盖. 故有 $H^s(F)\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^s+4\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^s\approx 1.600\,5$. 其中 s 如前文所述.

定理 3 上界的较精确估计, $H^s(F)\leqslant 1.436\,3$.

证明 取 $n=3$,可得到 F_2 及其基本正方形,如图 2 所示. 取八边形 $ABCDEFGH$ 为定理 1 中的可测集 U,则未被 U 包含在内的 F_3 的基本正方形有:16 个 $\frac{1}{2^6}$ - □和 8 个 $\frac{1}{2^5}$ - □并且,易得 $|U|=AE=\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2+1}$. 那么,据式(1)有

$$H^s(F)\leqslant\frac{\left(\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2+1}\right)^s}{1-\frac{16}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^6}-\frac{8}{\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)^5}}\approx 1.436\,3.$$

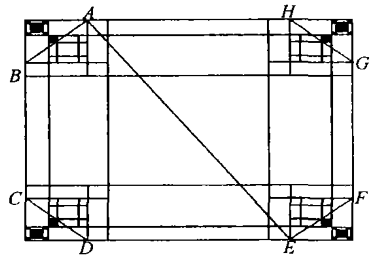

图 2 构造覆盖

此结果比定理 2 有较好的改进.

参 考 文 献

1 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度 ——Koch 曲线[J]. 中国科学(A 辑), 1998, 28(2): 103～107

2 周作领. 一个 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学(A 辑), 1999, 29(2): 138～144

3 瞿成勤, 苏维宜, 王衍波. Koch 曲线和 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的估计[J]. 南京大学学报(自然科学版), 2002, 36(4): 397～402

4 周作领. Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 中国科学(A 辑), 1997, 27(6): 491～496

5 Falconer KJ. Fractal geometry-mathematical foundation and application[M]. New York: John Wiley & Sons, 1990. 5～8

Estimating Upper Bound of Hansdorff Measure of a Special Self-Similar Fractal Set

Li Hao Chen Erming

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract By using the property of self-similar fractal, the authors obtain and apply a formula to estinate the upper bound of Hausdorff measure of a special fractal. By constructing special cover, a better upper bound of its Hausdorff measure is obtained.

Keywords self-similar fractal, δ-cover, basic square, Hausdorff measure