第 25 卷 第 1 期 华侨大学学报(自然科学版) Vol. 26 No. 1
2005 年 1 月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jan. 2005

文章编号 1000-5013(2005)01-0011-05

一类演化方程的一族高精度恒稳差分格式

曾 文 平

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 对一类演化方程 $\frac{\partial u}{\partial t}= a\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{1m+1}}$($a$ 为常数, $m=1, 2, \cdots$), 构造一族含双参数的三层高精度隐式差分格式. 当参数 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$ 时, 得到一个双层格式. 证明对一切正整数 m, 该格式对任意非负参数 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ 都是绝对稳定的, 并且其截断误差阶为 $O((\Delta t)^2+(\Delta x)^6)$. 数值例子表明, 所建立的差分格式是有效的, 理论分析与实际计算相吻合.

关键词 演化方程, 差分格式, 高精度, 绝对稳定
中图分类号 O 241.82 文献标识码 A

文〔1〕讨论了演化方程 $u_t=\alpha u^q u_1+au_p$($q\geqslant 0$, $p\geqslant 2$, p, q 是整数. α, a 是常数. u_1, u_p 分别表示 u 对 x 的一阶和 p 阶导数)的守恒律. 对这样一类很重要的方程, 如何建立相应的差分格式是一件很有意义的事. 众所周知, 上述方程在某种意义上讲是两个方程式 $u_t=\alpha u^q u_1$ 及 $u_t=au_p$ 的迭加. 当 p 为奇数及偶数时, 文〔2~7〕分别对方程 $u_t=au_p$ 建立若干差分格式. 但所有这些格式, 无论是显式格式、半显式格式或隐式格式, 其截数误差阶都较低, 仅有 $O(\Delta t+\Delta x)$ 或 $O(\Delta t+(\Delta x)^2)$ 或 $O((\Delta t)^2+(\Delta x)^2)$. 本文将着重讨论演化方程 $u_t=au^p$, 当 p 为奇数, 即 $p=2m+1$ 时的周期初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}}, \quad a\text{ 为常数}, \quad m=1,2,\cdots, \quad x\in\mathbf{R}, \quad t>0,\\&u(x,0)=f(x), \quad x\in\mathbf{R},\\&u(x+L,t)=u(x,t), \quad x\in\mathbf{R}, \quad t\geqslant 0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

对此可以构造一族三层(特殊情况下为两层), 含双参数、高精度的隐式差分格式. 它的截断误差阶为 $O((\Delta t)^2+(\Delta x)^6)$, 比已有格式精度高四至五阶. 当参数 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$ 时, 得到了一个两层高精度的差分格式. 证明了对一切正整数 m, 该族差分格式, 对任意选取的非负实参数 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$ 都是绝对稳定的. 数值例子表明, 本文所建立的差分格式是有效的, 其精度分析与稳定性分析是正确的.

1 差分格式的提出

设空间步长为 Δx, 时间步长为 Δt, 网域由点集 (x_j, t_n) $(j=0, 1, 2, \cdots J; n=0, 1, 2, \cdots)$ 所组成, 其中 $x_j=j\Delta x$, $t_n=n\Delta t$. $\Delta x=\frac{L}{J}$, L 为周期. 设 $r=a\Delta t/(\Delta x)^{2m+1}$ 为 $2m+1$ 阶演化方程(1)的网格比. 又引入关于 x 的 $2m$ 阶中心差分记号为

$$\delta_x^{2m}u_j^n=\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k c_{2m}^k u_{j+m-k}^n.\tag{2}$$

对高阶 $(2m+1)$ 阶演化方程周期初值问题(1), 提出三层多参数隐式差分格式为

收稿日期 2004-06-16
作者简介 曾文平(1940-), 男, 教授, 主要从事计算数学的研究. E-mail: zengwp@hqu.edu.cn
基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(04ZQR09)

$$\frac{\zeta_2}{2\Delta t}\{(\alpha+\frac{1}{2})u_{j+2}^{n+1}-2\alpha u_{j+2}^{n}+(\alpha-\frac{1}{2})u_{j+2}^{n-1}\}+\frac{\zeta_1}{2\Delta t}\{(\alpha+\frac{1}{2})u_{j+1}^{n+1}-2\alpha u_{j+1}^{n}+(\alpha-\frac{1}{2})u_{j+1}^{n-1}\}+$$
$$\frac{\zeta_0}{\Delta t}\{(\alpha+\frac{1}{2})u_{j}^{n+1}-2\alpha u_{j}^{n}+(\alpha-\frac{1}{2})u_{j}^{n-1}\}+\frac{\zeta_1}{2\Delta t}\{(\alpha+\frac{1}{2})u_{j-1}^{n+1}-2\alpha u_{j-1}^{n}+(\alpha-\frac{1}{2})u_{j-1}^{n-1}\}+$$
$$\frac{\zeta_2}{2\Delta t}\{(\alpha+\frac{1}{2})u_{j-2}^{n+1}-2\alpha u_{j-2}^{n}+(\alpha-\frac{1}{2})u_{j-2}^{n-1}\}=a\{(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+\beta)\frac{\delta_x^{2m}u_{j+1}^{n+1}-\delta_x^{2m}u_{j-1}^{n+1}}{2(\Delta x)^{2m+1}}+$$
$$(\frac{1}{2}-2\beta)\frac{\delta_x^{2m}u_{j+1}^{n}-\delta_x^{2m}u_{j-1}^{n}}{2(\Delta x)^{2m+1}}+(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+\beta)\frac{\delta_x^{2m}u_{j+1}^{n-1}-\delta_x^{2m}u_{j-1}^{n-1}}{2(\Delta x)^{2m+1}}\}. \tag{3}$$

初边界条件处理从略(下同). 差分格式(3)的实参数偶(α, β)为非负实参数偶; 而 ζ_0, ζ_1, ζ_2 是与方程阶数 $2m+1$ 有关的待定实常数. 适当选择这些参数和待定常数, 可以使差分方程(3)逼近微分方程(1)具有尽可能高阶的离散误差, 而且有较好的稳定性. 当 m 确定时, 对于参数偶(α, β)的不同选取, 便可得到不同的差分格式. 当 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$ 时, 便得到一个两层隐格式.

2 截断误差的讨论

对于高阶演化方程(1), 差分格式(3)的截断误差阶可达 $O((\Delta t)^2+(\Delta x)^6)$. 下面给予推导, 并由此确定常数 ζ_0, ζ_1 和 ζ_2. 记

$$D_t(\alpha,j)=\frac{1}{\Delta t}\{(\alpha+\frac{1}{2})u_j^{n+1}-2\alpha u_j^n+(\alpha-\frac{1}{2})u_j^{n-1}\}, \tag{4}$$

$$\eta_x(n)=\frac{a(\delta_x^{2m}u_{j+1}^n-\delta_x^{2m}u_{j-1}^n)}{2(\Delta x)^{2m+1}}. \tag{5}$$

设方程(1)的解充分光滑, 使得如下关系式成立, 即

$$\frac{\partial^{q+p}u}{\partial t^q\partial x^p}=a^q\frac{\partial^{(2m+1)q+p}u}{\partial x^{(2m+1)q+p}},\qquad p,q=0,1,2,\cdots. \tag{6}$$

在网格点($j\Delta x$, $n\Delta t$)处进行Taylor展开, 得

$$D_t(\alpha,j)=\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\Delta t\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{1}{6}(\Delta t)^2\frac{\partial^3u}{\partial t^3}+O((\Delta t)^3). \tag{7}$$

若记

$$B_{2v}=\frac{2}{(2v)!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k c_{2m}^k(m-k)^{2v},\qquad v=0,1,2,\cdots, \tag{8}$$

易证

$$B_0=B_2=\cdots=B_{2m-2}=0,\qquad B_{2m}=1,\qquad B_{2m+2}=\frac{m}{12},\qquad B_{2m+4}=\frac{m(5m-1)}{1\ 440}. \tag{9}$$

于是, 在($j\Delta x$, $n\Delta t$)处进行Taylor展开并利用式(6), 可得[6]

$$\frac{\delta_x^{2m}u_j^n}{(\Delta x)^{2m}}=\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}+B_{2m+2}(\Delta x)^2\frac{\partial^{2m+2}u}{\partial x^{2m+2}}+B_{2m+4}(\Delta x)^4\frac{\partial^{2m+4}u}{\partial x^{2m+4}}+$$
$$B_{2m+6}(\Delta x)^6\frac{\partial^{2m+6}u}{\partial x^{2m+6}}+B_{2m+8}(\Delta x)^8\frac{\partial^{2m+8}u}{\partial x^{2m+8}}+O((\Delta x)^{10}), \tag{10}$$

其中 B_{2m+2}, B_{2m+4}, B_{2m+6}, B_{2m+8} 由式(8)或式(9)所确定. 于是

$$\eta_x(n)=a\frac{\delta_x^{2m}u_{j+1}^n-\delta_x^{2m}u_{j-1}^n}{2(\Delta x)^{2m+1}}=\frac{\partial u}{\partial t}+(B_{2m+2}+\frac{1}{3!})(\Delta x)^2\frac{\partial^3u}{\partial t\partial x^2}+(B_{2m+4}+\frac{1}{3!}B_{2m+2}+$$
$$\frac{1}{5!})(\Delta x)^4\frac{\partial^5u}{\partial t\partial x^4}+(B_{2m+6}+\frac{1}{3!}B_{2m+4}+\frac{1}{5!})B_{2m+2}+\frac{1}{7!})(\Delta x)^6\frac{\partial^7u}{\partial t\partial x^6}+O((\Delta x)^8). \tag{11}$$

利用式(6) 式(11), 比较式(3)左、右两端的Taylor展开的同类项系数可知, 为使差分格式(3)逼近方程(1)的截断误差阶为 $O((\Delta t)^2+(\Delta x)^6)$, 参数 ζ_0, ζ_1, ζ_2 必须同时满足下列诸式

$$\left.\begin{aligned}&\zeta_0+\zeta_1+\zeta_2=1,\\&\frac{1}{2}(\zeta_1+4\zeta_2)=B_{2m+2}+\frac{1}{3!},\\&\frac{1}{24}(\zeta_1+16\zeta_2)=B_{2m+4}+\frac{1}{3!}B_{2m+2}+\frac{1}{5!}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

解方程组(12)可得

$$
\left.\begin{aligned}
\zeta_0 &= \frac{19}{30}-\frac{3}{2}B_{2m+2}+6B_{2m+4}=\frac{19}{30}-\frac{31}{240}m+\frac{1}{48}m^2,\\
\zeta_1 &= \frac{17}{45}+\frac{4}{3}B_{2m+2}-8B_{2m+4}=\frac{17}{45}+\frac{21}{180}m-\frac{m^2}{36},\\
\zeta_2 &= \frac{1}{90}+\frac{1}{6}B_{2m+2}+2B_{2m+4}=-\frac{1}{90}+\frac{1}{80}m+\frac{1}{144}m^2.
\end{aligned}\right\}\tag{13}
$$

代入式(3)，便得截断误差阶达 $O((\Delta t)^2+(\Delta x)^6)$ 的三层双参数隐式差分格式为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left(-\frac{1}{90}+\frac{1}{80}m+\frac{1}{144}m^2\right)\left\{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j+2}^{n+1}-2\alpha u_{j+2}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j+2}^{n-1}\right\}+\\
&\frac{1}{2\Delta t}\left(\frac{17}{45}+\frac{1}{180}m-\frac{1}{36}m^2\right)\left\{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j+1}^{n+1}-2\alpha u_{j+1}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j+1}^{n-1}\right\}+\\
&\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{19}{30}-\frac{31}{240}m+\frac{1}{48}m^2\right)\left\{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j}^{n+1}-2\alpha u_{j}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j}^{n-1}\right\}+\\
&\frac{1}{2\Delta t}\left(\frac{17}{45}+\frac{21}{180}m-\frac{1}{36}m^2\right)\left\{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j-1}^{n+1}-2\alpha u_{j-1}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j-1}^{n-1}\right\}+\\
&\frac{1}{2\Delta t}\left(-\frac{1}{90}+\frac{1}{80}+\frac{1}{144}m^2\right)\left\{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)u_{j-2}^{n+1}-2\alpha u_{j-2}^{n}+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)u_{j-2}^{n-1}\right\}=\\
&a\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\frac{\delta_x^{2m}u_{j+1}^{n+1}-\delta_x^{2m}u_{j-1}^{n+1}}{2(\Delta x)^{2m+1}}+\left(\frac{1}{2}-2\beta\right)\frac{\delta_x^{2m}u_{j+1}^{n}-\delta_x^{2m}u_{j-1}^{n}}{2(\Delta x)^{2m+1}}+\right.\\
&\left.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+\beta\right)\frac{\delta_x^{2m}u_{j+1}^{n-1}-\delta_x^{2m}u_{j-1}^{n-1}}{2(\Delta x)^{2m+1}}\right\}.
\end{aligned}\tag{14}
$$

在特殊情况下，当 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=0$ 时，得到一个两层隐格式为

$$
\begin{aligned}
&(-8+9m+5m^2)(u_{j+2}^{n+1}+u_{j-2}^{n+1})+(272+84m-20m^2)(u_{j+1}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})+\\
&(912-186m+30m^2)u_j^{n+1}-360r\delta_x^{2m}(u_{j+1}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})=\\
&(-8+9m+5m^2)(u_{j+2}^{n}+u_{j-2}^{n})+(272+84m-20m^2)(u_{j+1}^{n}+u_{j-1}^{n})+\\
&(912-186m+30m^2)u_j^{n+1}-360r\delta_x^{2m}(u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}).
\end{aligned}\tag{15}
$$

下述一个特例. 当 $m=1$ 时，方程(1)成为色散方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$. 此时，$\zeta_0=\frac{126}{240}$, $\zeta_1=\frac{112}{240}$, $\zeta_2=\frac{1}{120}$, 于是其相应的三层高精度隐格式为文[8]中格式(2.2)．特别地，当 $\alpha=\frac{1}{2}$ $\beta=0$ 时成为两层隐格式，此即为文[8]中格式(2.5)．

3　差分格式的稳定性

为分析差分格式族(14)的稳定性，先叙述如下 Miller 准则[9]. 设 $f(\lambda)$ 为复平面上的 n 次多项式

$$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n,\qquad a_0a_n\neq 0.$$

定义多项式

$$f^*(\lambda)=\lambda^n f\left(\frac{1}{\lambda}\right)=a_n+a_{n-1}\lambda+\cdots+a_1\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n$$

及降幂

$$f(\lambda)=\frac{1}{\lambda}[f^*(0)f(\lambda)-f(0)f^*(\lambda)],$$

其中 a_i 为 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 的共轭复数．

Miller 准则　多项式 $f(\lambda)$ 的所有根按模小于等于 1 的充要条件：(1) $|f^*(0)|>|f(0)|$, $f(\lambda)=0$ 只有按模小于等于 1 的根；(2) $f\equiv 0$ 且 $f'(\lambda)\equiv 0$ 的所有根按模小于等于 1.

现用 Fourier 方法[10]研究差分格式(14)的稳定性，首先令

$$e^{-ij\alpha}\delta_x^{2m}e^{ij\alpha}=\left(-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^m\overset{\text{令}}{=\!=}(-4s^2)^m,\tag{16}$$

其中记 $s=\sin\frac{\alpha}{2}$, $i=\sqrt{-1}$, $|\alpha|<\pi$. 令 $u_j^n=\lambda^n e^{ij\alpha}$代入格式(14),得其传播矩阵的特征方程为

$$f(\lambda)=[(\alpha+\frac{1}{2})F+i(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\alpha+\beta)G]\lambda^2-[2\alpha F-i(\frac{1}{2}-2\beta)G]\lambda+ [(\alpha-\frac{1}{2})F+i(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha+\beta)G]=0. \tag{17}$$

其中

$$F=F_{2m+1}(s^2)=(-\frac{1}{90}+\frac{1}{6}B_{2m+2}+2B_{2m+4})\cos 2\alpha+(\frac{17}{45}+\frac{4}{3}B_{2m+2}-8B_{2m+4})\cos\alpha+ (\frac{19}{30}-\frac{3}{2}B_{2m+2}+6B_{2m+4})=\frac{1}{45}(45-30s^2-4s^4)-\frac{4}{3}(3-s^2)s^2B_{2m+2}+16s^4B_{2m+4}. \tag{18}$$

$$G=G_{2m+1}(s^2)=(-4s^2)^m r\sin\alpha. \tag{19}$$

在式(18),(19)中, $s=\sin\frac{\alpha}{2}$. 由此可得降幂多项式为

$$\tilde{f}=\frac{f^*(0)f(\lambda)-f(0)f^*(\lambda)}{\lambda}= \{2\alpha F^2+\alpha(\frac{1}{2}+2\beta)G^2\}\lambda-\{2\alpha F^2-\alpha(\frac{1}{2}-2\beta)G^2-i2\alpha FG\}. \tag{20}$$

下面分两种情况讨论.

(i) 当 $\alpha=0$时, $\tilde{f}(\alpha)\equiv 0$, 此时

$$f(\lambda)=[\frac{1}{2}F+i(\frac{1}{4}+\beta)G]\lambda^2+i(\frac{1}{4}-2\beta)G\lambda+[-\frac{1}{2}F+i(\frac{1}{4}+\beta)G].$$

令$f'(\lambda)=[\frac{1}{2}F+i(\frac{1}{4}+\beta)G]\lambda+i(\frac{1}{4}-2\beta)G=0$. 注意到式(18)和式(19), 当 $\beta\geqslant 0$时, $f'(\lambda)$的根模$|\lambda|$满足下列关系, 即

$$|\lambda|^2=\left|\frac{G(\frac{1}{2}-2\beta)i}{F+(G\frac{1}{2}+2\beta)i}\right|=\frac{G^2(\frac{1}{2}-2\beta)^2}{F^2+(\frac{1}{2}-2\beta)^2G^2}<1.$$

故$f'(\lambda)$的根模$|\lambda|<1$, 由 Miller 准则知, $f(\lambda)$的根模$|\lambda|<1$. 从而当 $\alpha=0$, 对任意 $\beta\geqslant 0$, 差分格式(14)绝对稳定.

(ii) 当 $\alpha>0$时, 由$f(0)$及$f^*(0)$的表达式易知无论β为何值, 均有$|f^*(0)|>|f(0)|$, 而由式(20)知, 当 $\beta\geqslant 0$时, $\tilde{f}=0$的根为

$$|\lambda|^2=\left|\frac{2\alpha F^2-\alpha(1/2-2\beta)G^2-i2\alpha FG}{2\alpha F^2+\alpha(1/2+2\beta)G^2}\right|^2= \frac{4\alpha^2F^4+4\alpha^2(1/2+2\beta)F^2G^2+\alpha^2(1/2-2\beta)^2G^4}{4\alpha^2F^4+4\alpha^2(1/2+2\beta)F^2G^2+\alpha^2(1/2+2\beta)^2G^4}\leqslant 1.$$

当 $\beta>0$时, 上述不等式严格成立. 而当 $\beta=0$时, 上述不等式成为等式, 但此时$f(\lambda)$只有单根$|\lambda|=1$. 由Miller 准则知, 当 $\alpha>0$, $\beta\geqslant 0$时$f(\lambda)$的根的模$|\lambda|\leqslant 1$, 且$|\lambda|=1$时只有单根, 故差分格式(14)也稳定. 综上所述, 便得如下基本定理.

定理 对任意正整数 m, 逼近于高阶($2m+1$阶)演化方程(1)的周期初值问题所得的差分格式(14), 对任意非负参数 $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$均绝对稳定. 特别地, 格式(15)绝对稳定.

4 数值例子

解$2m+1$阶演化方程周期初值问题(1), 其中$f(x)=(-1)^m\sin x$, 周期$L=2\pi$, 精确解为 $u(x,t)=\sin(at+(-1)^m x)$. 当 $m=1,2,3,4$时, 利用格式(14)的绝对稳定进行求解. 取 $\Delta x=2\pi/64=\pi/32$, $\Delta t=r(\Delta x)^{2m+1}/a$, $a=\pm 1$, $|r|=1$进行计算, 得到 $n=500$列出数值结果比较, 如表1所示. 数值结果表明, 本文格式解与精确解能较好地吻合, 误差高达$10^{-12}\sim 10^{-8}$, 理论分析与实际计算相吻合.

表 1　数值误差比较表

a	$\lvert r\rvert$	m	x = 5π/32	17π/32	29π/32	41π/32
−1	1	1	3.5000×10^{-8}	5.0000×10^{-10}	-3.4000×10^{-8}	1.1000×10^{-8}
		2	7.6451×10^{-9}	-7.0259×10^{-9}	-8.4132×10^{-10}	-5.6623×10^{-9}
		3	2.1523×10^{-10}	3.5691×10^{-11}	-1.6501×10^{-11}	3.3013×10^{-11}
		4	4.4015×10^{-11}	1.0231×10^{-10}	2.8533×10^{-11}	-3.2210×10^{-11}
1	1	1	3.5000×10^{-8}	5.0000×10^{-8}	-3.4000×10^{-8}	1.1000×10^{-8}
		2	-7.7224×10^{-9}	9.0304×10^{-9}	8.2787×10^{-9}	5.7238×10^{-10}
		3	-4.6827×10^{-11}	1.0622×10^{-10}	2.8188×10^{-10}	2.8677×10^{-10}
		4	1.8129×10^{-10}	3.7434×10^{-11}	1.0092×10^{-10}	9.2074×10^{-12}

参　考　文　献

1 屠规彰, 秦孟兆. 非线性演化方程的不变群与守恒律——对称函数方法[J]. 中国科学, 1980, 25(5): 421~432

2 秦孟兆. 一类演化方程 $u = au^q u_1 + au_p$ 的差分格式[J]. 科学通报, 1982, 27(5): 261~263

3 曾文平. 一类演化方程的高稳定性的差分格式[J]. 计算物理, 1995, 12(4): 565~570

4 曾文平. 高阶发展方程的两类显式格式的稳定性分析[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1996, 17(3): 231~235

5 曾文平. 两类新的高稳定性的三层显式差分格式[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 1998, 19(3): 225~231

6 Cay½be³ K 著. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎译. 北京: 科学出版社, 1963. 143~153

7 曾文平. 高阶抛物型方程的具有高稳定性的显式与半显式差分格式[J]. 应用数学学报, 1996, 19(4): 631~634

8 曾文平. 解色散方程 $u = au_{xxx}$ 的一族绝对稳定的高精度的差分格式[J]. 计算数学, 1987, 9(4): 403~410

9 Miller J J H. On the location of zeros certain classes of polynomials with application to numerical analysis [J]. J. Inst. Math. Apples, 1971, (8): 397~406

10 Rihtmyer R D, Morton K W. Difference methods for initial-value problems[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1967. 3680

A Family of Absolutely Stable Difference Schemes of High Accuracy for Solving a Class of Evolution Equations

Zeng Wenping

(Department of Mathematics, Huaqiao University, 362021, Quanzhou, China)

Abstract　A family of three-layered and highly accurate implicit difference schemes containing two parameters are constructed for solving a class of evolution equations $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{1m+1}}$, where a is a constant, m equals to 1, 2, …. A two-layered scheme is obtained when parameters $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$. These schemes are proved to be absolutely stable for all positive integers m and for arbitrarily chosen non-negative parameters $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$; and their truncation errors are all in the order of $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^6)$. The difference schemes establishing in this paper are shown by numerical examples to be effective, their practical computation is shown to be consistent with theoretical analysis.

Keywords　evolution equation, difference scheme, high accuracy, absolutely stable