第 25 卷 第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 25 No. 4
2004 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 2004

文章编号 1000-5013(2004)04-0440-04

动态 IS-LM 模型及稳定性分析

王 倩　　龚德恩

(华侨大学经济管理学院, 福建 泉州 362021)

摘要　IS-LM 模型是描述产品市场和货币市场之间相互联系的理论结构. 以往的研究大都运用比较静态的方法分析模型中的一个或多个外生变量或参数发生变化时, 均衡收入与均衡率的变化规律. 这种方法很难对均衡状态之外的系统状况进行真正的动态分析. 文中利用萨缪尔森乘数加速数模型将 IS-LM 模型动态化, 对动态的 IS-LM 模型进行稳定性分析, 并与萨缪尔森乘数加速数模型进行比较. 从而, 证实动态的 IS-LM 模型更符合现实的经济运行情况.

关键词　IS-LM 模型, 动态化, 稳定性分析

中图分类号　O 212 ;F 224.0 ;F 20　　　**文献标识码**　A

1　萨缪尔森乘数加速数模型的稳定性分析

美国著名经济学家、诺贝尔经济学奖金获得者萨缪尔森, 在其 1939 年发表的《乘数原理和加速原理的相互作用》一文中, 提出了一个“乘数-加速数模型”. 该模型把时滞范畴引入周期分析, 并修正了哈罗德经济周期模型中的一个基本观点: 如果乘数和加速数保持不变, 则经济活动就处于一种稳步增长的状态, 而不会出现周期性波动. 萨缪尔森乘数加速数模型可表示为

$$\left.\begin{aligned} &Y_t = C_t + I_t + G_t, \\ &C_t a + bY_{t-1}, \quad a \geq 0, \quad 1 < b < 1, \\ &I_t = q + k(C_t - C_{t-1}), \quad k > 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

在式(1)中, Y_t, C_t, I_t 和 G_t 分别为 t 期国民收入、消费、投资和政府支出. a, b, q, k 为常数, b 为边际消费倾向, k 为投资加速数, a 为基本消费或自发消费, q 为自发投资. 设政府支出 $G \equiv \bar{G}$ 为外生常数[1]. 由式(1)消去 G_t, I_t, 可得到关于 Y_t 的二阶差分方程, 即

$$Y_t - (1+k)bY^{t-1} + kbY_{t-2} = a + q + \bar{G}. \tag{2}$$

式(2)的平衡状态或均衡收入为 $Y_e = \frac{1}{1-b}(a + q + \bar{G})$, 而式(2)的特征方程为

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - (1+k)b\lambda + kb = 0. \tag{3}$$

通过特征方程, 可得式(2)的解为

$$Y_t = \left.\begin{cases} c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + Y_e, & b > \dfrac{4k}{(1+k)^2}, \\ (c_1 + c_2 t)\lambda^t + Y_e, & b = \dfrac{4k}{(1+k)^2}, \\ r^t(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t) + Y_e, & b < \dfrac{4k}{(1+k)^2}, \end{cases}\right\} \tag{4}$$

其中 $\lambda_1 = \frac{1}{2}[(1+k)b - \sqrt{\Delta}]$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}[(1+k)b + \sqrt{\Delta}]\lambda = \frac{1}{2}(1+k)br = \sqrt{kb}$, $\omega = \arctan\frac{\sqrt{-\Delta}}{(1+k)b}$, $0 < \omega < \pi$, c_1, c_2 为两个任意常数, 由初值 Y_0, Y_1 确定. 于是, 由式(4)可得如下 7 点结论. (1) $0 < k < 1$,

收稿日期　2004-03-10

作者简介　王 倩(1979-), 女, 硕士研究生, 主要从事数量经济学的研究. E-mail: rachel @public.qz.fj.cn

$\frac{4k}{(1+k)^2} < b < 1$ 时, $\Delta > 0$,特征方程有两个相异实根 λ_1, λ_2,且 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$,故有 $\lim_{t \to \infty} Y_t = Y_e$. 因此,解 Y_t 的运动为非振荡、渐近稳定. (2) $0 < k < 1$, $b = \frac{4k}{(1+k)^2}$ 时, $\Delta = 0$,特征方程有一个重实根 λ,且 $0 < \lambda < 1$,故有 $\lim_{t \to \infty} Y_t = Y_e$. 因此,解 Y_t 的运动为非振荡、渐近稳定. (3) $k > 0$, $b = \frac{4k}{(1+k)^2}$ 时, $\Delta < 0$,特征方程有一对共轭复 $\lambda_{1,2}$,且 $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{kb} < 1$,故有 $\lim_{t \to \infty} Y_t = Y_e$. 因此,解 Y_t 的运动为非振荡、渐近稳定. (4) $k > 0$, $b = \frac{1}{k} < \frac{4k}{(1+k)^2}$ 时, $\Delta < 0$,特征方程有一对共轭复 $\lambda_{1,2}$,且 $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{kb} < 1$,故有 $Y_t = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + Y_e$. 因此,解 Y_t 将围绕 Y_e 作等幅振荡,稳定但非渐近稳定,即临界稳定. (5) $k > 0$, $\frac{1}{k} < b < \frac{4k}{(1+k)^2}$ 时, $\Delta < 0$,特征方程有一对共轭复 $\lambda_{1,2}$,且 $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{kb} > 1$,故有 $\lim_{t \to \infty} Y_t = \infty$. 因此,解 Y_t 的运动为非振荡、不稳定. (6) $k > 1$, $b = \frac{4k}{(1+k)^2}$ 时, $\Delta = 0$,特征方程有一重实根 λ,且 $\lambda > 1$,故有 $\lim_{t \to \infty} Y_t = \infty$. 因此,解 Y_t 的运动为非振荡、不稳定. (7) $k > 1$, $\frac{4k}{(1+k)^2} < b < 1$ 时, $\Delta > 0$,特征方程有两个相异实根 λ_1, λ_2,且 $1 < \lambda_1 < \lambda_2$,故有 $\lim_{t \to \infty} Y_t = \infty$. 因此,解 Y_t 的运动为非振荡、不稳定.

2　动态 IS-LM 模型及其稳定性分析

上一节简单讨论了乘数萨缪尔森加速数模型的稳定性问题,其实际上是研究商品市场达到供需均衡时,收入及消费与投资的运动规律. 现实经济中商品市场与货币市场是密不可分、交互影响的. 因此,应将商品与货币市场结合起来进行分析研究. 本节利用萨缪尔森乘数加速数模型将 IS-LM 模型动态化,然后对所构造的动态 IS-LM 模型进行稳定性分析,并与萨缪尔森乘数加速数模型进行比较. 我们构造的动态 IS-LM 模型商品市场为

$$\left.\begin{aligned}
&C_t = \bar{C} + bY_{t-1}^d, \quad \bar{C} \geq 0, \quad 0 < b < 1, \\
&Y_t^d = Y_t - T_t + \overline{TR}, \quad \overline{TR} > 0 \\
&T_t = \bar{T} + \tau Y_t, \quad \bar{T} \geq 0, \quad 0 < \tau < 1, \\
&I_t = \bar{I} + k(C_t - C_{t-1} - hi_t, \quad \bar{I} > 0, \quad k > 0, \quad h > 0, \\
&Y_t = C_t + I_t + \bar{G}, \quad \bar{G} > 0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

货币市场

$$L_t = \bar{L} + \alpha Y_t - \beta i_t, \quad \bar{L} \geq 0, \quad \bar{m} = \bar{M}/\bar{P}, \quad \bar{m} > 0, \quad \bar{m} = L_t. \tag{6}$$

其中内生变量 Y_t 为实际收入, C_t 为实际消费, I_t 为实际投资, Y_t^d 为实际可支配收入, T_t 为实际税收, i_t 为利息率, L_t 为实际货币需求. 外生变量 $\bar{G}$, $\overline{TR}$ 分别为实际政府支出、转移支付(财政政策决定), $\bar{m}$ 为实际货币供给(货币政策决定). 外生参数为 $\bar{C}, b, \bar{T}, \tau, \bar{I}, k, h, \bar{L}, \alpha, \beta$ 等, b 为边际消费倾向, τ 为边际税率, k 为投资加速数. 经过简单的运算,由式(5)得到商品市场供需均衡时, Y_t 与 i_t 应满足的条件为

$$Y_t - b(1+k)(1-\tau)Y_{t-1} = dk(1-\tau)Y_{t-2} + hi_t = \bar{Y}, \tag{7}$$

$$\bar{Y} = \bar{C} + \bar{I} + \bar{G} + b(\overline{TR} - \bar{T}). \tag{8}$$

类似的,由式(6)得到货币市场供需均衡时, Y_t 与 i_t 应满足的条件为

$$i_t = \frac{\alpha}{\beta} Y_t - \frac{1}{\beta}(\bar{m} - \bar{L}). \tag{9}$$

当商品市场与货币市场同时达到供需均衡是,式(7)与式(9)应同时成立. 于是,将式(9)代入式(7),得到商品市场与货币市场同时均衡时, Y_t 应满足的条件为

$$Y_t - a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} = \tilde{Y}. \tag{10}$$

其中 $a_1 = \frac{\beta b(1+k)(1-\tau)}{\beta + \alpha h}$, $a_2 = \frac{\beta bk(1-\tau)}{\beta + \alpha h}$, $\tilde{Y} = \frac{\beta \bar{Y} + h(\bar{m} - \bar{L})}{\beta + \alpha h}$. 容易证明,式(11)的平衡状态或特解为

$$Y_e = \frac{\beta\bar{Y} + h(\bar{m} - \bar{L})}{\alpha h + \beta[1 - b(1 - \tau)]}, \tag{11}$$

式(11)确定的平衡状态 Y_e 即为静态 IS-LM 模型的均衡收入.

下面讨论方程(10)关于平衡状态或均衡收入 Y_e 的稳定性. 方程(10)的特征方程为

$$\lambda^2 - a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{12}$$

经计算可知,方程(11)渐近稳定的充分必要条件为 $|a_2| < 1$, $|a_1| < 1 + a_2$. 由式(10)得

$$\frac{bk}{A} < 1, \qquad \frac{(1+k)b}{A} < 1 + \frac{bk}{A}, \tag{13}$$

其中

$$A = \frac{\beta + \alpha h}{(1-\tau)\beta} > 1. \tag{14}$$

式(13)中的第2个不等式等价于 $b < A$,因为 $A > 1$, $0 < b < 1$, 故恒成立. 于是,方程(11)渐近稳定的充分必要条件为 $b < \frac{A}{k}$,其中 A 由式(14)确定. 与萨缪尔森乘数加速数模型类似地,可对方程(10)的解 Y_t 的运动特征进行分析. 特征方程(12)判别式为

$$\Delta a_1^2 - 4a_2 = \left[\frac{(1+k)b}{A}\right]^2 - \frac{4kb}{A} = \frac{(1+k)^2 b}{A^2}\left[b - \frac{4Ak}{(1+k)^2}\right].$$

因此,方程(10)的解为

$$Y_t = \begin{cases} c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + Y_e, & b > \dfrac{4Ak}{(1+k)^2}, \\ (c_1 + c_2 t)\lambda^t + Y_e, & b = \dfrac{4Ak}{(1+k)^2}, \\ r^t(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t) + Y_e, & b < \dfrac{4Ak}{(1+k)^2}, \end{cases} \tag{15}$$

其中 $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+k)b}{A} - \sqrt{\Delta}\right]$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+k)b}{A} + \sqrt{\Delta}\right]$, $\lambda = \frac{(1+k)b}{A}$, $r = \sqrt{\frac{kb}{A}}$, $\omega = \arctan\frac{A\sqrt{-\Delta}}{(1+k)b}$, $0 < \omega < \pi$. 于是,与萨缪尔森乘数加速数模型类似地分析,可得动态 IS-LM 模型(5),(6)或方程(10)的解 Y_t 的稳定区域和运动特征,如图1(虚线为萨缪尔森模型的稳定区域)和表1所示. 图1中,有

$$\begin{aligned} &k^* = A = \frac{\beta + \alpha h}{(1-\tau)\beta} > 1, \\ &0 < k_1 = 2A - 1 - 2\sqrt{A(A-1)}, \\ &k_2 = 2A - 1 + 2\sqrt{A(A-1)} > 0, \\ &b_1 = \frac{A}{k}, \qquad b_2 = \frac{4Ak}{(1+k)^2}, \end{aligned}$$

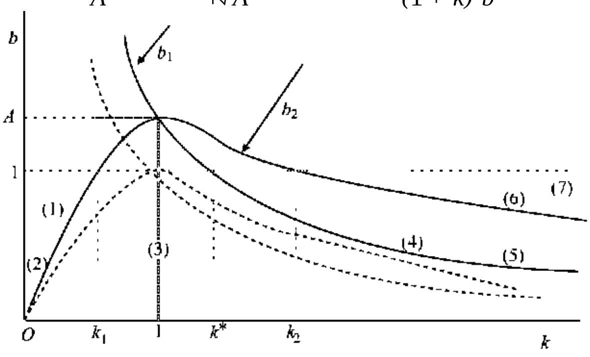

图1　动态 IS-LM 模型的稳定区域示意图

表1　动态 IS-LM 模型解 Y_t 的运动特征分类

序号	k 和 b 的取值范围	特征值 λ_1 和 λ_2	Y_t 的运动特征
1	$0 < k < k_1$, $\frac{4Ak}{(1+k)^2} < b < 1$	两个实特征值 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$	非振荡、渐近稳定
2	$0 < k < k_1$, $b = \frac{4Ak}{(1+k)^2}$	一个重特征值 $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$	非振荡、渐近稳定
3	$0 < k \leq k_1$, $0 < b < \frac{4Ak}{(1+k)^2}$ $k_1 < k \leq k^*$, $0 < b < 1$ $k < k^*$, $0 < b < \frac{A}{k}$	一对共轭复特征值 $\vert\lambda_{1,2}\vert < 1$	振荡、渐近稳定
4	$k > k^*$, $b = \frac{A}{k}$	一对共轭复特征值 $\vert\lambda_{1,2}\vert = 1$	等幅振荡、临界稳定

续表

序号	k 和 b 的取值范围	特征值 λ_1 和 λ_2	Y_t 的运动特征
5	$k^* < k \leq k_2$, $\frac{A}{k} < b < 1$ $k > k_2$, $\frac{A}{k} < b < \frac{4Ak}{(1+k)^2}$	一对共轭复特征值 $\mid\lambda_{1,2}\mid > 1$	振荡、不稳定
6	$k > k_2$, $b = \frac{4Ak}{(1+k)^2}$	一个重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 > 1$	非振荡、不稳定
7	$k > k_2$, $\frac{4Ak}{(1+k)^2} < b < 1$	二个实特征值 $1 < \lambda_1 < \lambda_2$	非振荡、不稳定

3　结论

根据图 1 和表 1 比较两模型的分析结果,可得 3 点结论.(1) 萨缪尔森乘数加速数模型是动态 IS-LM 模型的特例. 在动态 IS-LM 模型中,令 $\tau = h = 0$,则有 $A = k^* = k_1 = k_2 = 1$. 于是,动态 IS-LM 模型等同于萨缪尔森乘数加速数模型. 这时商品市场的运动不受货币市场的影响,仅由其自身结构参数决定,而货币市场利息率 i_t 由式(10) 确定,i_t 与 Y_t 同方向变化. 这表明货币市场的运动受到商品市场的影响. (2) 动态 IS-LM 模型比萨缪尔森乘数加速数模型更容易稳定. 由图 1 可知,动态 IS-LM 模型的渐近稳定区域比萨缪尔森乘数加速数模型的渐近稳定更大. 比如,当对消费结构不作要求时,即仅要求 $0 < b < 1$ 时,萨缪尔森模型渐近稳定的条件为 $0 < k \leq 1$,而动态 IS-LM 模型渐近稳定的条件为 $0 < k \leq k^*$,因 $k^* = A > 1$,故 $1 < k \leq k^*$ 时,动态 IS-LM 模型对 $0 < b < 1$ 仍为渐近稳定的. 其原因是,动态 IS-LM 模型是一种商品市场与货币市场交互作用的模型. 当商品市场的运行状态不佳时,货币市场通过利息率的传导,调节商品市场的投资,使商品市场的运行状态得以改善. (3) 动态 IS-LM 模型比 IS-LM 模型比萨缪尔森乘数加速数模型更容易出现振荡波动,这符合经济实际. 由图 1 可知,动态 IS-LM 模型的振荡波动区域比萨缪尔森乘数加速数模型的振荡波动区域更大. 经济实际表明,货币市场是个极易振荡波动的市场,货币市场的振荡波动通过利息率的传导,必然会使商品市场的投资跟随着振荡波动,因而动态 IS-LM 模型比未考虑货币市场因素的萨缪尔森乘数加速数模型更容易出现振荡波动.

参　考　文　献

1　肖　恩著. 动态经济学[M]. 吴汉宏译. 北京:中国人民大学出版社,2001. 260～287

2　多恩布什. 宏观经济学[M]. 张一弛等译. 北京:中国人民大学出版社,2001. 56～58

3　龚德恩,舒辅琪,俞翔华. 动态经济学 ——方法与模型[M]. 北京:中国人民大学出版社,1990. 79～86

Stability Analysis of Dynamic IS-LM Model

Wang Qian　　Gong De'en

(College of Econ. Manag., Huaqiao Univ., 362021, Quanzhou, China)

Abstract　IS-LM model is a theoretical structure describing interrelation between product market and curreney market. In previous studies, a relatively static method is mostly used in analysing law of the change of equilibrium income and equilibrium rate when one or multiple exogenous variables or parmeters in the model change. This method is difficult to carry out a true dynamic analysis of system status beyond equilibrium state. The authors make IS-LM model to be dynamic by using Samuelson's multiplicator-accelerator model; and then, carry out stability analysis of dynamic IS-LM model and compare it with Samuelson's multiplicato-accelerator model. The dynamic IS-LM model is proved to be in even more conformity with the actual situation of economic performance.

Keywords　IS-LM model, turning into dynamic, stability analysis