

文章编号 1000-5013(2004)04-0410-05

# 两自由度绳牵引并联机构

刘华生 童 昕

(华侨大学机电及自动化学院, 福建 泉州 362021)

**摘要** 对两自由度绳牵引并联机构作系统研究, 进行运动学、静力学和动力学的分析. 设计出控制系统, 并在 Simulink 下完成系统仿真. 提出求运动学正解的新算法, 可以显著减小系统误差; 抽出新的拉力分布方法并利用绳牵引并联机构的拉力应满足的条件, 建立一个线性规划的标准模型. 用单纯形法可以方便地求出绳的拉力, 并确保满足绳拉力大于零的条件, 且拉力的分布更加合理. 仿真结果验证以上算法的正确性.

**关键词** 绳牵引, 并联机构, 拉力分布, 仿真

**中图分类号** TH 112 TH 113.2<sup>+</sup>2

**文献标识码** A

与杆支撑并联机构相比, 绳牵引并联机构具有机构简单、惯性小、平动工作空间大和运动速度快等特点. 因此, 它被研究用于航空航天、大型轮船舰艇制造、机械加工等方面<sup>[1~3]</sup>. Williams 和 Gallina<sup>[1,2]</sup>对两自由度绳牵引并联机构作了比较系统的研究, 但其仿真结果并不满意. 本文在 Williams 和 Gallina 的基础上, 作了对由三根绳牵引的两自由度绳牵引并联机构进一步研究, 并且取得了满意的仿真结果. 它为原型机的试制和更复杂的绳牵引并联机构的研究, 奠定了良好的基础.

## 1 机构模型

由 3 根绳牵引的两自由度绳牵引并联机构的模型, 如图 1 所示. 动平台简化为 1 个点  $P$ , 由 3 根绳牵引, 各绳的另一端分别与固定在机架上由电机驱动的滑轮相连, 记连接点为  $A_1, A_2, A_3$ .  $O$  为等边三角形  $A_1A_2A_3$  的形心, 机构的固定坐标系为  $Oxy$ ,  $P$  点的坐标为  $(x, y)$ , 连接点  $A_i$  的坐标为  $(A_{ix}, A_{iy})$ . 设  $A_1A_2A_3$  的边长为  $L$ , 绳的长度用  $L_i$  表示, 绳的角度用  $\theta_i$  表示,  $i = 1, 2, 3$ . 由于动平台的工作空间只能在  $A_1A_2A_3$  内, 所以  $0 < \theta_1 < 60^\circ, 120^\circ < \theta_2 < 180^\circ, 240^\circ < \theta_3 < 300^\circ$ .

## 2 运动学分析

运动学逆解, 即已知动平台的位置  $P$  的坐标  $(x, y)$ , 求绳长  $L_i (i = 1, 2, 3)$ . 这是比较简单的. 运动学正解则相反, 即已知绳长  $L_i (i = 1, 2, 3)$ , 求动平台的位置  $P$  的坐标  $(x, y)$ . Williams<sup>[1]</sup>用算法 1 求运动学正解为

$$x = \frac{L^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L}, y = \pm \sqrt{L_1^2 - x^2}.$$

如果没有任何误差, 按这种算法求得的  $P$  点的坐标是连续的. 但是误差是不可避免的, 由于  $y$  的正负号需要通过绳长进行判断, 会导致  $y$  突然变号而不连续, 从而造成较大的计算误差. 以下几种算法 2~5 无需判断正负号, 就可求得运动学正解. 算法 2 为

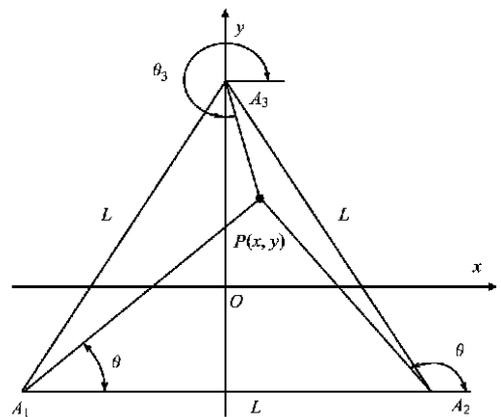


图 1 两自由度绳牵引并联机构的模型

收稿日期 2003-12-22

作者简介 刘华生(1976-), 男, 硕士研究生, 主要从事绳牵引机构的研究. E-mail: liu\_huasheng2000@yahoo.com

$$PA_1A_2 = \cos^{-1}\left(\frac{L^2 + L_1^2 - L_2^2}{2LL_1}\right),$$

$$x_{12} = A_{1x} + L_1 \cos PA_1A_2,$$

$$y_{12} = A_{1y} + L_1 \sin PA_1A_2.$$

算法 2 利用绳长 1 和绳长 2,  $x_{12}, y_{12}$  分别表示用绳 1 长和绳长 2 计算所得的末端执行器 P 横坐标和纵坐标.  $x_{23}, y_{23}, x_{31}, y_{31}$  也以此类推,  $x_{123}, y_{123}$  则表示用绳长 1、绳长 2 和绳长 3 计算所得的末端执行器 P 横坐标和纵坐标. 算法 3 为

$$PA_2A_1 = 60^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{L^2 + L_2^2 - L_3^2}{2LL_2}\right),$$

$$x_{23} = A_{2x} - L_2 \cos PA_2A_1,$$

$$y_{23} = A_{2y} + L_2 \sin PA_2A_1.$$

算法 4 为

$$PA_1A_2 = 60^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{L^2 + L_1^2 - L_3^2}{2LL_2}\right),$$

$$x_{31} = A_{1x} + L_1 \cos PA_1A_2,$$

$$y_{31} = A_{1y} + L_1 \sin PA_1A_2.$$

算法 2, 3 和 4 都只利用了两个绳长. 在一般情况下, 3 根绳的长度均可得, 利用 3 个绳长, 进一步减少误差, 可采用算法 5. 算法 5 为

$$x_{123} = \frac{1}{3} (x_{12} + x_{23} + x_{31}),$$

$$y_{123} = \frac{1}{3} (y_{12} + y_{23} + y_{31}).$$

### 3 静力学分析

两自由度绳牵引并联机构静力学模型, 如图 2 所示. 设动平台的惯性力为  $F$ , 并且不考虑其它力的作用, 则

$$ST = F.$$

在上式中,  $S = \begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \end{bmatrix}$  为描述 3 根绳拉

力方向的矩阵,  $T = [t_1 \ t_2 \ t_3]^T$  为绳的拉力,  $F =$

$[c_F \ s_F]^T$ . 而  $c_i$  表示  $\cos i$ ,  $s_i$  表示  $\sin i$ ;  $i =$

$\tan^{-1}\left(\frac{y - A_{iy}}{x - A_{ix}}\right)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $F = \tan^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right)$ ,  $0 < F <$

$360^\circ$ . 设其通解为

$$T = T_p + N,$$

其中  $T_p$  为  $ST = F$  的特解,  $N$  为  $ST = 0$  的通解.

绳只能受拉, 不能受压, 即要求绳的拉力  $t_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 且绳的最大拉力应该不大于其许用拉力.  $N$  仅保持绳张紧, 对于  $F$  没有贡献. 为提高系统的有效功率, 以及减小系统的误差, 应要求  $N$  尽可能小.

Williams<sup>[2,3]</sup> 给出的计算绳拉力的方法中, 取  $T_p = S^+ F$  (其中  $S^+ = S^T(SS^T)^{-1}$  为 Moore-Penrose 逆).

这样求解比较简单, 但因为并非所有的  $S^+$  的元素都取正值,  $S^+$  中的负元素会导致  $T_p$  的部分元素出现负值,  $N$  不得不取较大的正值以确保绳的拉力大于最小拉力  $t_{min}$ , 不利于提高系统的有效功率和减小系统的误差. 如果能使  $T_p$  非负, 则  $N$  只需取较小的值, 就可保证绳的拉力  $T$  大于最小拉力  $t_{min}$ , 本文基于这一思想, 提出了另一种拉力分布方法.

#### 3.1 特解的 $T_p$ 确定

从以上的分析可知,  $T_p$  要满足的条件为

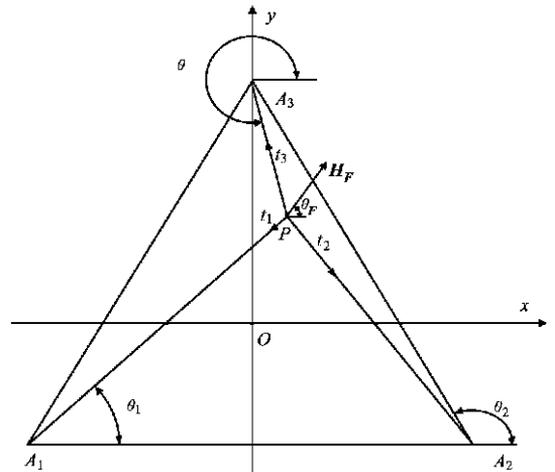


图 2 静力学模型

$$ST_p = F_p, \quad T_p \geq 0\}.$$

其中  $T_p \geq 0$  表示  $T_p$  的每一个元素大于或等于零. 由于满足上述条件的  $T_p$  有无穷多个, 为使绳的拉力不超过许用拉力, 我们期望求得其中最小的值. 这样, 可以降低对绳和电机的要求, 使机构的造价更加低廉. 为此, 再加入一个条件, 使  $T_p$  中各元素的和  $Z$  最小, 即

$$\min Z = J^T T_p,$$

其中  $J = [1 \ 1 \ 1]^T$ . 于是, 可得一个线性规划的标准数学模型这

$$\min Z = J^T T_p, \quad \text{s. t. } ST_p = F_p, \quad T_p \geq 0.$$

求解采用单纯形法, 可以参考文献 [4~6].

### 3.2 通解的确定

由于  $N = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$  为方程  $ST=0$  的通解, 即

$$\begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 & -c_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0.$$

可以解得

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \sin(\alpha_3 - \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 - \alpha_3) \\ \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \end{bmatrix},$$

其中  $c$  为正实数. 因为要求  $n_i \geq t_{\min}$ , 则应有  $n_{\min} = \min\{n_1, n_2, n_3\} \geq t_{\min}$ , 而  $n_1, n_2, n_3$  的大小由点  $P$  的位置确定. 用三力平衡关系可以证明, 点  $P$  到  $A_1A_2A_3$  的顶点  $A_i$  的距离越远, 绳  $A_iP$  的拉力  $n_i$  部分越小. 即当点  $P$  在  $A_2OA_3$  内,  $n_1 = \min\{n_1, n_2, n_3\}$ . 当点  $P$  在  $A_1OA_3$  内,  $n_2 = \min\{n_1, n_2, n_3\}$ ; 当点  $P$  在  $A_1OA_2$  内,  $n_3 = \min\{n_1, n_2, n_3\}$ . 不失一般性. 设点  $P$  在  $A_2OA_3$  内,  $\min\{n_1, n_2, n_3\} = n_1 = c[\sin(\alpha_3 - \alpha_2)] \geq t_{\min}$ . 故当  $c = \frac{t_{\min}}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)}$  时,  $n_i \geq t_{\min}$ . 为使  $N = [n_1, n_2, n_3]^T$  尽可能小, 取  $c = \frac{t_{\min}}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)}$ . 由以上分析可知  $t_{pi} \geq 0, n_i \geq t_{\min}$ , 故绳的拉力  $t_i = t_{pi} + n_i \geq t_{\min}$ . 另外,  $T_p$  和  $N$  均按最小值求得, 因此认为  $T = T_p + N$  是较小的. 如果此时绳的拉力仍然超过了绳的许用拉力, 可以选取许用拉力更高的绳.

## 4 动力学分析

绳由滑轮直接驱动, 如图 3 所示. 设滑轮的半径、转动惯量, 以及与绳的转动粘性阻尼系数分别为  $r_i, J_i$  和  $c_i, i = 1, 2, 3$ . 这里假定滑轮的半径均相等, 即  $r_1 = r_2 = r_3 = r$ . Williams 和 Gallina<sup>[1,2]</sup>给出了驱动器(图 3)和系统的动力学方程(图 4). 驱动器的动力学方程为

$$T = \frac{1}{r} ( - J \ddot{\beta} - C \dot{\beta} ),$$

其中  $J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}, T = [t_1 \ t_2 \ t_3]^T$  为绳的拉力,  $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T$  为滑轮的扭矩,  $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T$  为滑轮转过的角度. 系统的动力学方程为

$$M_{eq} \ddot{X} + N(X, \dot{X}) = S(X),$$

其中

$$M_{eq} = rM + S(X)J \frac{\partial}{\partial X},$$

$$S(X) = \begin{bmatrix} -\cos \alpha_1 & -\cos \alpha_2 & -\cos \alpha_3 \\ -\sin \alpha_1 & -\sin \alpha_2 & -\sin \alpha_3 \end{bmatrix},$$

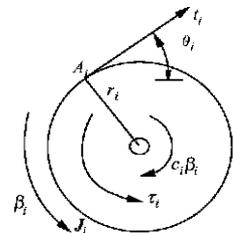


图 3 驱动器模型

$$i = \tan^{-1}\left(\frac{y - A_{iy}}{x - A_{ix}}\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial}{\partial X} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{x - A_{1x}}{L_1} & \frac{y - A_{1y}}{L_1} \\ \frac{x - A_{2x}}{L_2} & \frac{y - A_{2y}}{L_2} \\ \frac{x - A_{3x}}{L_3} & \frac{y - A_{3y}}{L_3} \end{bmatrix}$$

而  $L_i = \sqrt{(x - A_{ix})^2 + (y - A_{iy})^2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $N$

$$(X, \dot{X}) = S(X) \left( J \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial X} + C \frac{\partial}{\partial X} \dot{X} \right), M =$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, m \text{ 为动平台的质量.}$$

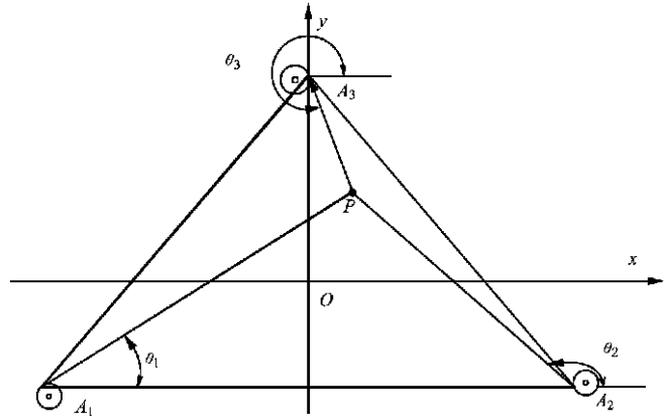


图 4 动力学模型

### 5 控制系统设计

控制系统包括PID控制器、前馈部分和反馈部分。首先由轨迹规划模块得到动平台的参考位置，进而得到前馈项，其输出为  $M_{eq}\ddot{X}$ ，再通过拉力分布模块和驱动器模块得到输入系统动力学方程的扭矩。由于绳长不便直接测量，要通过滑轮的转角换算得来。因此，系统的输出为滑轮的转角，再通过角度转换模块得到绳长，并由运动学正解模块得到位置的测量值。PID 控制器按照动平台的位置误差来调节系统。

### 6 仿真实例

图 5 为 Simulink 模型。从图 6 可以看出在任意时刻，各根绳的拉力 (T) 均大于给定的最小拉力 1 N。图 7 和图 8 相对照，采用算法 5 计算运动学正解所得观测器误差 ( ) 比采用算法 1 小几个数量级。图 9 显示轨迹误差达到  $\mu\text{m}$ ，系统的控制方案是可行的。

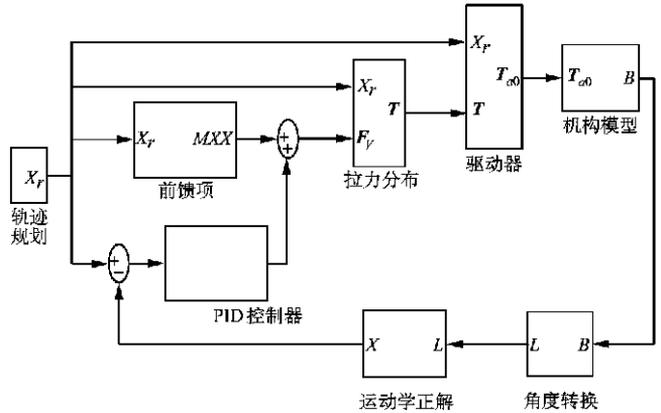


图 5 Simulink 下的仿真模型

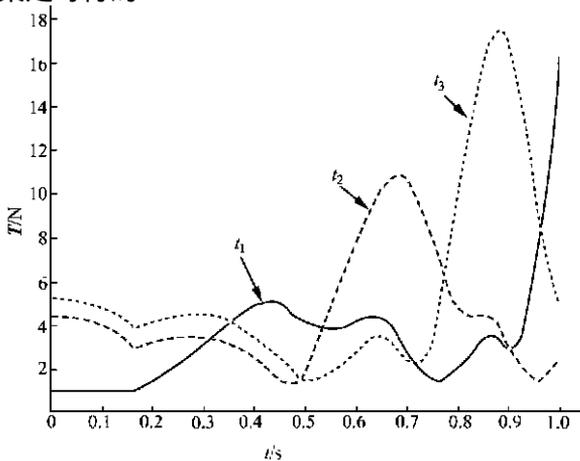


图 6 绳的拉力 T 与时间的关系

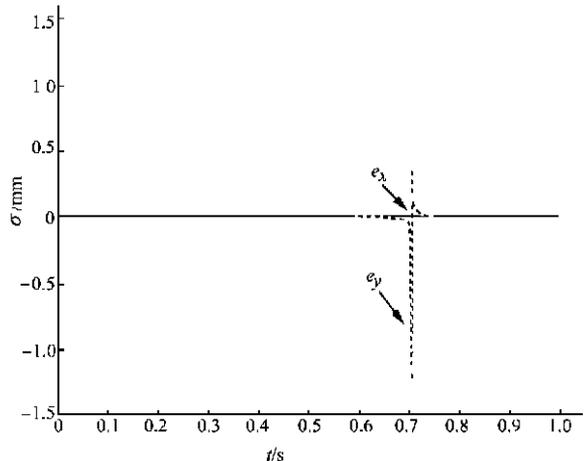


图 7 算法 1 所得的观测器误差

取等边三角形  $A_1A_2A_3$  的边长 1 m，滑轮半径 0.05 m，动平台质量 1 kg，滑轮的转动惯量 0.000 8 kg  $\text{m}^2$ ，滑轮的转动粘性阻尼系数 0.000 01 N  $\cdot\text{s}$ 。动平台 P 在 1 s 时间内绕形心 O 以半径 0.216 5 m 顺时针加速旋转一周，并设定绳的最小拉力为 1 N。仿真在 Simulink 环境下直接建模，并采用 0.001 定步长和 ode5 微分方程求解器。PID 控制器的值均为  $2 \times 2$  的对角阵，3 个对角阵的对角线上的值分别为 3 000 000, 4 000 和 50 000。

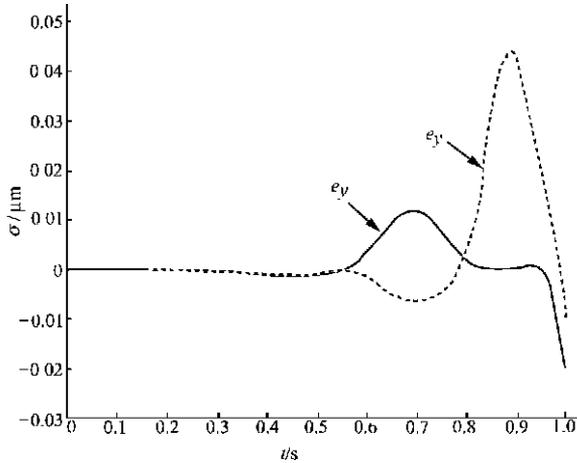


图8 采用算法5所得的观测器误差

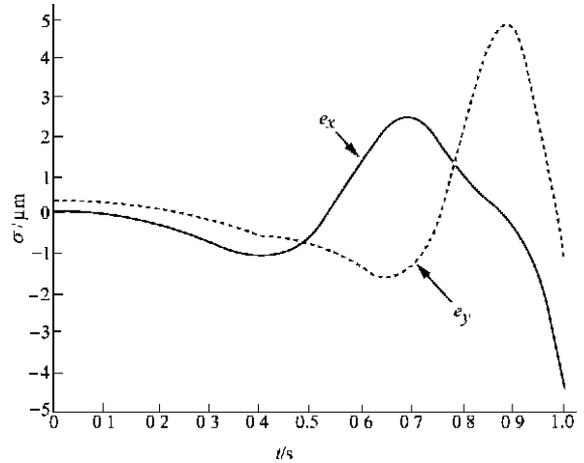


图9 轨迹误差

## 7 结束语

本文在前人的基础上,进一步研究了两自由度绳牵引并联机构.对两自由度绳牵引并联机构的运动学正解和拉力分布,提出了新的算法.设计了控制系统,并在 Simulink 环境下进行实例仿真,取得了满意的结果.它为原型机的试制和更复杂的绳牵引并联机构的研究,奠定了良好的基础.

## 参 考 文 献

- Williams II R L, Gallina P. Planar cable-direct-driven robots part I: Kinematics and statics[A]. In: the ASME Design Automation Committee, eds. Proceedings of the 2001 ASME Design Technical Conferences 27th Design Automation Conference[C]. New York: ASME Technical Publishing Department, 2001. 21 145 ~ 21 146
- Gallina P, Rossi A, Williams II R L. Planar cable-direct-driven robots part II: Dynamics and control [A]. In: the ASME Design Automation Committee, eds. Proceedings of the 2001 ASME Design Technical Conferences 27th Design Automation Conference[C]. New York: ASME Technical Publishing Department, 2001. 21 146 ~ 21 147
- 郑亚青, 刘雄伟. 绳牵引并联机构的研究概况与发展趋势[J]. 中国机械工程, 2003, 14(9): 808 ~ 810
- 张建中, 许绍吉. 线性规划[M]. 北京: 科学出版社, 2002. 1 ~ 70
- 何坚勇. 运筹学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000. 40 ~ 92
- Strong G. Linear algebra and applications [M]. New York: Academic Press, 1980. 305 ~ 322

## A Wire-Driven Parallel Mechanism with Two Degrees of Freedom

Liu Huasheng      Tong Xin

(College of Electromech. Eng. & Auto., Huaqiao Univ., 362021, Quanzhou, China)

**Abstract** With respect to a wire-driven parallel mechanism with two degrees of freedom, the authors make a systematic study and carry out kinematic, static and dynamic analysis. A control system is designed and the system is simulated under Simulink. A new algorithm is proposed for kinematic positive solution, by which the system error can be significantly reduced. A new method of tension distribution is explored; and the standard model of linear programming is established by using the conditions with which the tension of the wire-driven parallel mechanism should be met. By using simplex method, the wire tension can be easily solved and can be ensured to meet the conditions that it is above zero and its distribution is even more reasonable. The correctness of the algorithms mentioned above is verified by results of simulation.

**Keywords** wire-driven, parallel mechanism, tension distribution, simulation