

文章编号 1000 5013(2004) 04 0406 04

双曲回转镜面的数控加工模型

张 雷 唐余勇

(哈尔滨工业大学数学系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要 双曲回转镜面因其具备特殊的光学性质而被广泛应用. 研究批量生产这种光学镜面的精密模具数控加工问题, 给出用球头刀二轴联动的加工方案. 文中同时给出工具参数和加工行距, 以及其水平进给、轴向进给的整套数学模型和相应的严格证明. 用实例验证方案的可行性和模型的可靠性. 这为此类镜面批量生产的模具制造, 提供全面、有益的参考数据.

关键词 双曲回转面, 数控加工, 数学模型

中图分类号 TG 659 **文献标识码** A

双曲回转面过回转轴的截形为图 1 所示双曲线. 从一个焦点 F_1 发出的光线经双曲线反射的反射线必过另一焦点 F_2 , 因而可广泛用于大型场面的灯光照明. 制造高精度双曲回转镜面的模具, 具有工程应用价值. 显然, 这一特殊回转面的数控加工比一般的复杂曲面加工有许多不同, 既不同于既有线性插补运动又有行距进给的螺旋桨压力面的加工^[1,2], 又不同于二轴联动的只有线性插补运动的双转铣刀加工^[3]. 它只有行距问题及为实现行距采取的如图 2 所示的水平进给、轴向进给的控制问题, 不需考虑步长问题. 如考虑离轴情况, 仅需加上线性插补运动, 因而对更复杂的问题亦可提供借鉴. 于是, 对文^[4]

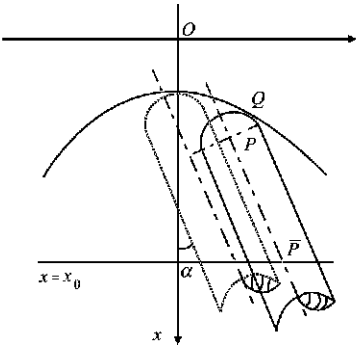


图 1 双曲线的光学性质

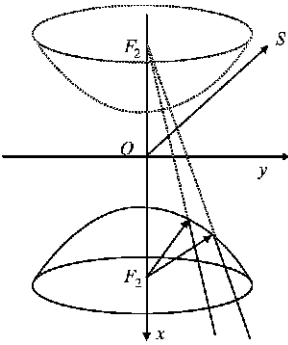


图 2 二轴联动双曲回转面

所讨论的问题也可参考本文改进. 可见, 本文不但具备实际应用价值, 而且具备更广泛的理论价值. 本文首先介绍二轴联动加工方案, 进而给出球头刀的半径及行距的计算模型, 并给出保证行距实现的水平、轴向两个进给量的计算公式和相应的理论证明. 最后, 用实例对方案和模型进行考核.

1 数控加工双曲回转面的方案

如图 1, 2 所示, 光学双曲回转面的对称轴为 x 轴. 在图 1 所示的坐标系下, 回转面方程为

$$r = \{ x, y, z \} = \{ acht, bsht \cos \theta, bsht \sin \theta \}, \tag{1}$$

收稿日期 2004- 04- 29

作者简介 张 雷(1980-), 男, 硕士研究生, 主要从事机械产品虚拟实境中的几何反算理论及其数学模型的研究.
E mail: thorzhang@ 163. com

基金项目 黑龙江省自然科学基金资助项目(F01- 23); 哈尔滨工业大学跨学科交叉性研究基金资助项目(HITMD 2000.

在式(1)中, a 为实轴长, b 为虚轴长, t 和 θ 为曲面参数.

因为回转面(1)以 x 轴为对称轴, 任何过 x 轴的截面与回转面所得交线为双曲线. 加工刀具在工件(回转面)自转时任一瞬时与回转面相对位置, 如图 2 所示. 图中 $x = x_0$ 线为步进电机控制运动量的水平轴, $P\bar{P}$ 轴为刀具回转轴, 且球心在 P 点, Q 为球面与双曲回转面的瞬时接触点, $P\bar{P}$ 之长-轴向进给量由步进电机控制. 这就是由工件-双曲回转面绕回转轴自转, 用步进电机控制水平和轴向的二轴联动的进给. 另外, 刀具轴与 x 轴成 α 角, 以避开球头刀具零切削问题. 这便可确定双曲回转面的二轴联动数控加工方案. 以下的问题, 可归结为求许用球头刀具的半径、许用行距以及二轴进给量的控制模型.

2 球头刀具许用半径的确定

为了防止过切, 球头刀具的许用半径应小于双曲回转面所有方向的曲率半径. 也即, 许用刀具半径 R 应满足

$$R = \frac{1}{\max\{|k_1|, |k_2|\}}, \tag{2}$$

式中 k_1, k_2 为双曲回转面任一点的主曲率. 通过分析, 可以证明

$$R = \frac{1}{\max\{|k_1|, |k_2|\}} = \frac{b^2}{a}. \tag{3}$$

即球头刀许用半径为

$$R = \frac{b^2}{a}. \tag{4}$$

式(4)中, a 和 b 如式(1), 为双曲线实轴和虚轴参数值. 下面简介式(3)的证明. 显然, 双曲回转面(1)的过任一点的两条曲率线, 分别为其经线-双曲线和纬线-圆 ($x = x_1, t = 0$). 其切线为主方向, 对应法曲率为其主曲率. 对经线, 对应主曲率为

$$R_1 = k_1^{-1} = \frac{1}{ab}(a^2\text{sh}^2t + b^2\text{ch}^2t)^{3/2} = \frac{1}{ab}((a^2 + b^2)\text{ch}^2t - a^2)^{3/2}. \tag{5}$$

然而, 曲率线-圆之半径恰为 \bar{R} , 且有 $\bar{R} = y = b\text{sh}t$. 该曲率半径与另一主曲率半径 $|\frac{1}{k_2}| = R_2$, 满足默尼埃公式(图 3). 即

$$\bar{R} = R_2\cos\bar{\theta},$$

式中 $\bar{\theta}$ 为如图 3 所示的 n 与 β 的夹角. 于是, 有

$$R_2 = \frac{\bar{R}}{\cos\bar{\theta}} = \frac{b\text{sh}t}{\cos(\arccos\frac{\{a\text{sh}t, b\text{ch}t, 0\} \cdot \{0, -1, 0\}}{\sqrt{a^2\text{sh}^2t + b^2\text{ch}^2t}} - \frac{\pi}{2})} = \frac{b\sqrt{(a^2 + b^2)\text{ch}^2t - a^2}}{a}.$$

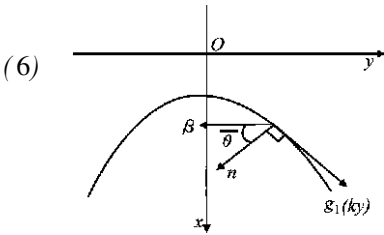


图 3 曲率线圆之主法矢 β 与曲面法矢 n 的相对位置

由于考虑的是上半双曲回转面, 因此 $x = a\text{ch}t \geq a$, 即 $\text{ch}t \geq 1$. 显然, 主曲率半径 R_1, R_2 在 $\text{ch}t = 1(t = 0)$ 时同时取得最小值 $\frac{b^2}{a}$, 因此为了防止过切, 球头刀许用半径为 $\frac{b^2}{a}$.

3 许用行距计算模型

为求许用行距, 先给出图 2 所示的球心 P 的轨迹方程. 在图 2 中, 双曲线方程为

$$\bar{r} = \{a\text{ch}t, b\text{sh}t\}. \tag{8}$$

球心 P 的轨迹为其法向距离为所取球头刀半径 R^* ($\leq R$) 的法向外等距线, 即

$$r^* = \{x^*, y^*\} = \{a\text{ch}t + R^* \frac{b\text{ch}t}{\sqrt{a^2\text{sh}^2t + b^2\text{ch}^2t}}, b\text{sh}t - R^* \frac{a\text{ch}t}{\sqrt{a^2\text{sh}^2t + b^2\text{ch}^2t}}\}. \tag{9}$$

如图 4 所示, 若在抛光前允许最大残留高度为 δ , 为确保加工精度高于要求, 当以最小曲率半径 R 来取

代实际曲率半径. 若记行距 $PP^* = L^*$, 则 L^* 应小于满足

$$R - \sqrt{(R - R^*)^2 - (\frac{L}{2})^2} - \sqrt{R^{*2} - (\frac{L}{2})^2} - \delta = 0 \quad (10)$$

的 L , 以确保任一行距中曲面的残留高度 $\delta_i \leq \delta$. 这一结论的依据是当实际加工点的曲率半径为 R_i 时, 由前文讨论可知

$$R_i = R + \Delta R_i, \quad \Delta R_i > 0,$$

且对应的残留高度用取得的 R_i 来计算. 实际残留高度比 δ 还要小. 显然, 实际残留高度为

$$\delta_i = R_i - \sqrt{(R_i - R^*)^2 - (\frac{L}{2})^2} - \sqrt{R^{*2} - (\frac{L}{2})^2}. \quad (11)$$

那么, 由

$$\delta - \delta_i = -\Delta R_i + \sqrt{(R_i - R^*)^2 - (\frac{L}{2})^2} - \sqrt{(R - R^*)^2 - (\frac{L}{2})^2},$$

并且

$$\sqrt{(R_i - R^*)^2 - (\frac{L}{2})^2} - \sqrt{(R - R^*)^2 - (\frac{L}{2})^2} > \Delta R_i,$$

反证即可求出. 可知

$$\delta_i < \delta. \quad (12)$$

因此, 上述所取行距 L^* , 它确保了所有实际残留高度比允许值小.

4 水平进给和轴向进给量的确定

为确保每一行距内残留高度 $\delta_i < \delta$, 水平进给量、轴向进给量应当确保行距 L^* (图 5). 显然, 刀具轴线瞬时与 $x = x_0$ 交点 \bar{P}_i 与 \bar{P}_{i+1} 之距离为相应水平进给量, 记为 Δy_i .

瞬时球头刀球心 $\bar{P}_i(x_i^*, y_i^*)$ 满足方程(9), 并有

$$(x_1^*, y_1^*) = (a + R^*, 0), \quad (13)$$

且与坐标 $\bar{P}_{i+1}(x_{i+1}^*, y_{i+1}^*)$ 满足

$$(x_{i+1}^* - x_i^*)^2 + (y_{i+1}^* - y_i^*)^2 = L^{*2}. \quad (14)$$

显然, 由初始条件(13), 将式(9)代入式(14), 先求出 t_{i+1} , 再代入式(9). 这样, 便可求出 x_{i+1}^* 和 y_{i+1}^* ($i = 1, 2, 3, \dots$).

而 $P_i\bar{P}_i$ 方程为

$$y - y_i^* = \tan\alpha(x - x_i^*). \quad (15)$$

令 $x = x_0$ (x_0 为水平轴在坐标系下的坐标), 则可求出轴线 $P_i\bar{P}_i$ 与 $x = x_0$ 交点的 y 坐标 \bar{y}_i . 于是, 可得水平进给量为

$$\Delta y_i = \bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i, \quad (16)$$

而轴向进给量由图 5 易见, 可根据 $P_i\bar{P}_i$ 之长变化来求出. 显然, $P_i\bar{P}_i$ 长为

$$S_i = \sqrt{(x_i^* - x_0)^2 + (y_i^* - \bar{y}_i)^2}, \quad (17)$$

则轴向进给量为

$$\Delta S_i = S_{i+1} - S_i. \quad (18)$$

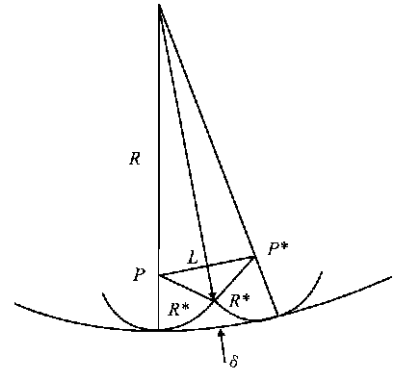


图 4 行距的确定

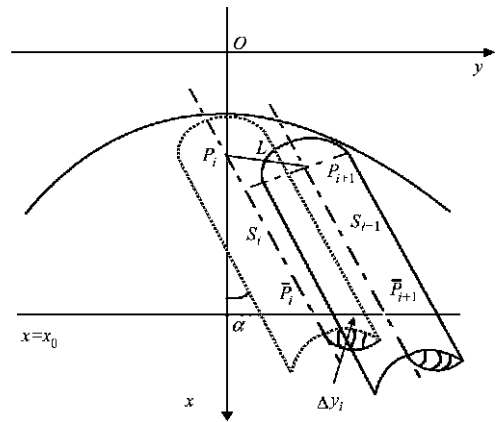


图 5 水平与轴向进给

5 实例验证

对双曲回转面(1)的参数, 给定 a 为 75 mm, b 为 45 mm, α 为 $\frac{\pi}{6}$, x_0 为 200 mm, 抛光前允许最大残留

高度 δ 为 0.001 mm. 那么, 由前述模型可以算得球头刀许用最大半径为 $R = 27$ mm, 实际选用 $R^* = 25$ mm, 而许用行距 $L = 0.121\ 7$ mm, 实际选用 $L^* = 0.1$ mm. 最终实得

$$\delta^* = \max\{\delta_i\} = 0.000\ 675\ \text{mm}.$$

对应于各行距的运动参数和残留高度, 如表 1 所示. 由表 1 可以知道, 本文所供方案和模型是可行的、可靠的.

表 1 水平和轴向进给量与残留高度关系表

i	1	2	3	4	5
Δy_i	0.098 529	0.095 643	0.092 928	0.090 531	0.088 433
ΔS_i	- 0.002 854	- 0.008 232	- 0.012 871	- 0.016 764	- 0.020 052
δ_i	0.000 675	0.000 636	0.000 554	0.000 474	0.000 409

i	6	7	8	9	10
Δy_i	0.086 543	0.084 901	0.08 340	0.08 196	0.080 641
ΔS_i	- 0.022 866	- 0.025 336	- 0.027 523	- 0.029 463	- 0.031 223
δ_i	0.000 360	0.000 322	0.000 292	0.000 268	0.000 248

6 结束语

本文不仅提供了可行、可靠的二轴联动加工双曲回转面的方案和模型, 而且还给出相应结果的严格证明. 它为进一步探讨应用广泛的课题, 诸如椭圆回转面、抛物回转面及其离轴情形, 提供可依托的参考. 因此, 本文不但具有一定的应用价值, 而且具备较广泛的理论、应用方面的参考意义.

参 考 文 献

1 唐余勇, 任秉银. 复杂曲面的区域分类与数控加工[J]. 河北科技大学学报, 2002, 23(2): 7~ 11
2 唐余勇, 任秉银. 等螺距螺旋桨数控加工中的刀具选择[J]. 黑龙江大学学报(自然科学版), 2002, 19(1): 31~ 36
3 任秉银, 唐余勇. 数控加工中的建模理论及其应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2000. 31~ 285
4 Han C S, Dong S, Tang Y Y. Geometric model of the ultra precision grinding for large non axisymmetric optical aspheric[J]. Key Engineering Materials, 2004, 257-258: 57~ 62

A Model for Numerically Controlled Machining the Surface
of Hyperbolical and Gyro Mirror

Zhang Lei Tang Yuyong

(Dept. of Math., Harbin Inst. of Tech., 150001, Harbin, China)

Abstract The hyperbolical and gyro mirrors have wide application due to its special optical property. For producing the precise moulds of this optical mirror in batch under numerical control, the authors give here a sheme of machining which is characterized by biaxial gearing of half-end cutters. The authors also give parameters of tool and row spacing of working as well as a complete set of mathematical models of its horizontal feed and axial feed including corresponding strict proof. The feasibility of the scheme and the reliability of the model are verified by examples. Comphrenhensive and useful reference data are thus offered for the manufacture of mould in batch production of this kind of mirrors.

Keywords hyperbolical and gyro mirror, numerical control, mathematical model