第 25 卷　第 4 期　华侨大学学报(自然科学版)　Vol. 25　No. 4
2004 年 10 月　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　Oct. 2004

文章编号　1000-5013(2004)04-0356-04

多元 Janous 不等式的幂指推广

吴　善　和

(龙岩学院数学系, 福建 龙岩 364012)

摘要　利用排序不等式和切比雪夫不等式, 证明多元 Janous 型不等式的幂指推广形式. 同时, 推广了近年来关于 Janous 猜想及其猜测的推广、质疑等一些文章的主要结果.

关键词　Janous 不等式, 排序不等式, 切比雪夫不等式, 指数, 推广
中图分类号　O 178　　文献标识码　A

1　问题的提出

不等式名家 Janous 对循环不等式有着特别浓厚的兴趣, 他在这一领域发表了许多有影响的研究成果. 1991 年, 他在加拿大数学杂志 Crux Math 第 17 期上提出 1 个关于循环不等式的著名猜想[1], 即 Janous 猜想. 设 $x, y, z > 0$, 则

$$\frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} + \frac{x^2 - z^2}{y + z} \geqslant 0. \tag{1}$$

《数学通讯》1992 年第 4 期刊载了这个猜想, 曾引起人们的广泛关注, 目前这个不等式已有多种证明方法[2~4]. 2001 年, 周建国、王敢在文[5]中从项数方向给出 Janous 不等式的多元推广. 设 $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $s = x_1 + x_2 + \cdots, x_n$, 则

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{s - x_2} + \frac{x_3^2 - x_2^2}{s - x_3} + \cdots + \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{s - x_n} + \frac{x_1^2 - x_n^2}{s - x_1} \geqslant 0. \tag{2}$$

文[6]指出, 不等式(2)不具有关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称性, 故不能在"不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$"的前提下来证明式(2). 而文[5]的证明利用了该假设, 因而上述推广不等式的证明是错误的. 文[6]的末尾还提出一个关于不等式(1)的项数与指数统一推广的问题.

设 $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $n \geqslant 3$, $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. 那么, 能否取适当的 k, 有

$$\frac{x_2^k - x_1^k}{s - x_2} + \frac{x_3^k - x_2^k}{s - x_3} + \cdots + \frac{x_n^k - x_{n-1}^k}{s - x_n} + \frac{x_1^k - x_n^k}{s - x_1} \geqslant 0. \tag{3}$$

本文给出 Janous 不等式两个很广泛的推广结果, 由此可解决文[6]提出的问题.

2　Janous 不等式的推广

定理 1　设 $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $n \geqslant 2$, $\alpha\beta > 0$, $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $S = x_1^\beta + x_2^\beta + \cdots + x_n^\beta$ 则

$$\frac{x_2^\alpha - x_1^\alpha}{(s - x_2)^\beta} + \frac{x_3^\alpha - x_2^\alpha}{(s - x_3)^\beta} + \cdots + \frac{x_n^\alpha - x_{n-1}^\alpha}{(s - x_n)^\beta} + \frac{x_1^\alpha - x_n^\alpha}{(s - x_1)^\beta} \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\frac{x_2^\alpha - x_1^\alpha}{S - x_2^\beta} + \frac{x_3^\alpha - x_2^\alpha}{S - x_3^\beta} + \cdots + \frac{x_n^\alpha - x_{n-1}^\alpha}{S - x_n^\beta} + \frac{x_1^\alpha - x_n^\alpha}{S - x_1^\beta} \geqslant 0. \tag{5}$$

当 $\alpha\beta < 0$ 时, 式(4), (5) 中不等号反向.

收稿日期　2004-03-23
作者简介　吴善和(1966-), 男, 副教授, 主要从事不等式理论的研究. E-mail: wushanhe@yahoo.com.cn
基金项目　国家自然科学基金资助项目(10271071)

证明　将 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 按递减顺序排列后依次记为 $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_n}$ ($x_{j_1} \geqslant x_{j_2} \geqslant \cdots \geqslant x_{j_n}$), 则

$$\frac{x_1^\alpha}{(s-x_1)^\beta}+\frac{x_2^\alpha}{(s-x_2)^\beta}+\cdots+\frac{x_n^\alpha}{(s-x_n)^\beta}=\frac{x_{j_1}^\alpha}{(s-x_{j_1})^\beta}+\frac{x_{j_2}^\alpha}{(s-x_{j_2})^\beta}+\cdots+\frac{x_{j_n}^\alpha}{(s-x_{j_n})^\beta},$$

$$\frac{x_1^\alpha}{S-x_1^\beta}+\frac{x_2^\alpha}{S-x_2^\beta}+\cdots+\frac{x_n^\alpha}{S-x_n^\beta}=\frac{x_{j_1}^\alpha}{S-x_{j_1}^\beta}+\frac{x_{j_2}^\alpha}{S-x_{j_2}^\beta}+\cdots+\frac{x_{j_n}^\alpha}{S-x_{j_n}^\beta},$$

$$\frac{x_n^\alpha}{(s-x_1)^\beta}+\frac{x_1^\alpha}{(s-x_2)^\beta}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\alpha}{(s-x_n)^\beta}=\frac{x_{k_1}^\alpha}{(s-x_{j_1})^\beta}+\frac{x_{k_2}^\alpha}{(s-x_{j_2})^\beta}+\cdots+\frac{x_{k_n}^\alpha}{(s-x_{j_n})^\beta},$$

$$\frac{x_n^\alpha}{S-x_1^\beta}+\frac{x_1^\alpha}{S-x_2^\beta}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\alpha}{S-x_n^\beta}=\frac{x_{k_1}^\alpha}{S-x_{j_1}^\beta}+\frac{x_{k_2}^\alpha}{S-x_{j_2}^\beta}+\cdots+\frac{x_{k_n}^\alpha}{S-x_{j_n}^\beta},$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的一个排列. 若 $\alpha\beta>0$, 分两种情况. (Ⅰ) 当 $\alpha>0$, $\beta>0$ 时, 有

$$x_{j_1}^\alpha \geqslant x_{j_2}^\alpha \geqslant \cdots \geqslant x_{j_n}^\alpha,$$

$$\frac{1}{(s-x_{j_1})^\beta} \geqslant \frac{1}{(s-x_{j_2})^\beta} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{(s-x_{j_n})^\beta},$$

$$\frac{1}{S-x_{j_1}^\beta} \geqslant \frac{1}{S-x_{j_2}^\beta} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{S-x_{j_n}^\beta}.$$

(Ⅱ) 当 $\alpha>0$, $\beta<0$ 时, 有

$$x_{j_1}^\alpha \leqslant x_{j_2}^\alpha \leqslant \cdots \leqslant x_{j_n}^\alpha,$$

$$\frac{1}{(s-x_{j_1})^\beta} \leqslant \frac{1}{(s-x_{j_2})^\beta} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{(s-x_{j_n})^\beta},$$

$$\frac{1}{S-x_{j_1}^\beta} \leqslant \frac{1}{S-x_{j_2}^\beta} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{S-x_{j_n}^\beta}.$$

综合(Ⅰ), (Ⅱ)并运用引理中的排序不等式, 得

$$\frac{x_{j_1}^\alpha}{(s-x_{j_1})^\beta}+\frac{x_{j_2}^\alpha}{(s-x_{j_2})^\beta}+\cdots+\frac{x_{j_n}^\alpha}{(s-x_{j_n})^\beta}\geqslant\frac{x_{k_1}^\alpha}{(s-x_{j_1})^\beta}+\frac{x_{k_2}^\alpha}{(s-x_{j_2})^\beta}+\cdots+\frac{x_{k_n}^\alpha}{(s-x_{j_n})^\beta},$$

$$\frac{x_{j_1}^\alpha}{S-x_{j_1}^\beta}+\frac{x_{j_2}^\alpha}{S-x_{j_2}^\beta}+\cdots+\frac{x_{j_n}^\alpha}{S-x_{j_n}^\beta}\geqslant\frac{x_{k_1}^\alpha}{S-x_{j_1}^\beta}+\frac{x_{k_2}^\alpha}{S-x_{j_2}^\beta}+\cdots+\frac{x_{k_n}^\alpha}{S-x_{j_n}^\beta}.$$

所以

$$\frac{x_1^\alpha}{(s-x_1)^\beta}+\frac{x_2^\alpha}{(s-x_2)^\beta}+\cdots+\frac{x_n^\alpha}{(s-x_n)^\beta}\geqslant\frac{x_n^\alpha}{(s-x_1)^\beta}+\frac{x_1^\alpha}{(s-x_2)^\beta}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\alpha}{(s-x_n)^\beta},$$

$$\frac{x_1^\alpha}{S-x_1^\beta}+\frac{x_2^\alpha}{S-x_2^\beta}+\cdots+\frac{x_n^\alpha}{S-x_n^\beta}\geqslant\frac{x_n^\alpha}{S-x_1^\beta}+\frac{x_1^\alpha}{S-x_2^\beta}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\alpha}{S-x_n^\beta}.$$

将上述两个不等式移项、整理即得不等式(4), (5). 所以当 $\alpha\beta>0$ 时定理1中不等式成立. 若 $\alpha\beta<0$, 分两种情况. (Ⅰ) 当 $\alpha>0$, $\beta<0$ 时, 有 $x_{j_1}^\alpha \geqslant x_{j_2}^\alpha \geqslant \cdots \geqslant x_{j_n}^\alpha$, $\frac{1}{(s-x_{j_1})^\beta} \leqslant \frac{1}{(s-x_{j_2})^\beta} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{(s-x_{j_n})^\beta}$, $\frac{1}{S-x_{j_1}^\beta} \leqslant \frac{1}{S-x_{j_2}^\beta} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{S-x_{j_n}^\beta}$. (Ⅱ) 当 $\alpha<0$, $\beta>0$ 时, 有 $x_{j_1}^\alpha \leqslant x_{j_2}^\alpha \leqslant \cdots \leqslant x_{j_n}^\alpha$, $\frac{1}{(s-x_{j_1})^\beta} \geqslant \frac{1}{(s-x_{j_2})^\beta} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{(s-x_{j_n})^\beta}$, $\frac{1}{S-x_{j_1}^\beta} \geqslant \frac{1}{S-x_{j_2}^\beta} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{S-x_{j_n}^\beta}$. 综合(Ⅰ), (Ⅱ)并运用引理中的排序不等式, 得

$$\frac{x_{j_1}^\alpha}{(s-x_{j_1})^\beta}+\frac{x_{j_2}^\alpha}{(s-x_{j_2})^\beta}+\cdots+\frac{x_{j_n}^\alpha}{(s-x_{j_n})^\beta}\leqslant\frac{x_{k_1}^\alpha}{(s-x_{j_1})^\beta}+\frac{x_{k_2}^\alpha}{(s-x_{j_2})^\beta}+\cdots+\frac{x_{k_n}^\alpha}{(s-x_{j_n})^\beta},$$

$$\frac{x_{j_1}^\alpha}{S-x_{j_1}^\beta}+\frac{x_{j_2}^\alpha}{S-x_{j_2}^\beta}+\cdots+\frac{x_{j_n}^\alpha}{S-x_{j_n}^\beta}\leqslant\frac{x_{k_1}^\alpha}{S-x_{j_1}^\beta}+\frac{x_{k_2}^\alpha}{S-x_{j_2}^\beta}+\cdots+\frac{x_{k_n}^\alpha}{S-x_{j_n}^\beta}.$$

所以

$$\frac{x_1^\alpha}{(s-x_1)^\beta}+\frac{x_2^\alpha}{(s-x_2)^\beta}+\cdots+\frac{x_n^\alpha}{(s-x_n)^\beta}\leqslant\frac{x_n^\alpha}{(s-x_1)^\beta}+\frac{x_1^\alpha}{(s-x_2)^\beta}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\alpha}{(s-x_n)^\beta},$$

$$\frac{x_1^\alpha}{S-x_1^\beta}+\frac{x_2^\alpha}{S-x_2^\beta}+\cdots+\frac{x_n^\alpha}{S-x_n^\beta}\leqslant\frac{x_n^\alpha}{S-x_1^\beta}+\frac{x_1^\alpha}{S-x_2^\beta}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\alpha}{S-x_n^\beta}.$$

将上述两个不等式移项、整理, 即得不等式(4),(5)的反向不等式. 所以当 $\alpha\beta<0$ 时, 定理1中反向不等式成立. 在定理1的不等式中, 令 $\alpha=2$, $\beta=1$ 即得不等式(2). 在式(2)中, 取 $n=3$, 便得到 Janous 的猜想不等式.

引理[7] 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$, $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$, 则排序不等式

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}\geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1, \tag{6}$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列.

切比雪夫不等式

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geqslant(a_1b_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\geqslant$$
$$n(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1). \tag{7}$$

由定理1知, 使不等式(3)成立的指数的取值范围是 $k\geqslant 0$, 这就回答了文[6]提出的问题. 文[6]指出 Janous 不等式的另一种推广形式为设 $x_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, $n\geqslant 2$, $s=x_1+x_2+\cdots+x_n$, $S=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$, 则

$$\frac{nx_1^2-S}{s-x_1}+\frac{nx_2^2-S}{s-x_2}+\cdots+\frac{nx_n^2-S}{s-x_n}\geqslant 0. \tag{8}$$

取 $n=3$, 由式(8)可得式(1). 这里将不等式(8)推广为

定理2 设 $x_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, $n\geqslant 2$, $\alpha\beta\gamma>0$, $S=x_1^\alpha+x_2^\alpha+\cdots+x_n^\alpha$, $A>\max\{x_1^\gamma, x_2^\gamma, \cdots, x_n^\gamma\}$, 则

$$\frac{nx_1^\alpha-S}{(A-x_1^\gamma)^\beta}\ \frac{nx_2^\alpha-S}{(A-x_2^\gamma)^\beta}+\cdots+\frac{nx_n^\alpha-S}{(A-x_n^\gamma)^\beta}\geqslant 0. \tag{9}$$

当 $\alpha\beta\gamma<0$ 时, 式(9)中不等号反向. 取 $\alpha=2$, $\beta=\gamma=1$, $A=s=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 由式(9)可得式(8).

证明 将 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 按递减顺序排列后依次记为 $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_n}(x_{j_1}\geqslant x_{j_2}\geqslant\cdots\geqslant x_{j_n})$, 则

$$\frac{nx_1^\alpha-S}{(A-x_1^\gamma)^\beta}\ \frac{nx_2^\alpha-S}{(A-x_2^\gamma)^\beta}+\cdots+\frac{nx_n^\alpha-S}{(A-x_n^\gamma)^\beta}=\frac{nx_{j_1}^\alpha-S}{(A-x_{j_1}^\gamma)^\beta}\ \frac{nx_{j_2}^\alpha-S}{(A-x_{j_2}^\gamma)^\beta}+\cdots+\frac{nx_{j_n}^\alpha-S}{(A-x_{j_n}^\gamma)^\beta},$$
$$A>\max\{x_{j_1}^\gamma, x_{j_2}^\gamma, \cdots, x_{j_n}^\gamma\}. \tag{10}$$

若 $\alpha\beta\gamma>0$, 分4种情况. (Ⅰ) 当 $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ 时, 有

$$nx_{j_1}^\alpha-S\geqslant nx_{j_2}^\alpha-S\geqslant\cdots\geqslant nx_{j_n}^\alpha-S,$$

$$\frac{1}{(A-x_{j_1}^\gamma)^\beta}\geqslant\frac{1}{(A-x_{j_2}^\gamma)^\beta}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{(A-x_{j_n}^\gamma)^\beta}.$$

(Ⅱ) 当 $\alpha>0$, $\beta<0$, $\gamma<0$ 时, 有

$$nx_{j_1}^\alpha-S\geqslant nx_{j_2}^\alpha-S\geqslant\cdots\geqslant nx_{j_n}^\alpha-S,$$

$$\frac{1}{(A-x_{j_1}^\gamma)^\beta}\geqslant\frac{1}{(A-x_{j_2}^\gamma)^\beta}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{(A-x_{j_n}^\gamma)^\beta}.$$

(Ⅲ) 当 $\alpha<0$, $\beta>0$, $\gamma<0$ 时, 有

$$nx_{j_1}^\alpha-S\leqslant nx_{j_2}^\alpha-S\leqslant\cdots\leqslant nx_{j_n}^\alpha-S,$$

$$\frac{1}{(A-x_{j_1}^\gamma)^\beta}\leqslant\frac{1}{(A-x_{j_2}^\gamma)^\beta}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{(A-x_{j_n}^\gamma)^\beta}.$$

(Ⅳ) 当 $\alpha<0$, $\beta<0$, $\gamma>0$ 时, 有

$$nx_{j_1}^\alpha-S\leqslant nx_{j_2}^\alpha-S\leqslant\cdots\leqslant nx_{j_n}^\alpha-S,$$

$$\frac{1}{(A-x_{j_1}^\gamma)^\beta}\leqslant\frac{1}{(A-x_{j_2}^\gamma)^\beta}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{(A-x_{j_n}^\gamma)^\beta}.$$

综合(Ⅰ)~(Ⅳ)并运用引理中的切比雪夫不等式, 得

$$\frac{nx_{j_1}^\alpha-S}{(A-x_{j_1}^\gamma)^\beta}+\frac{nx_{j_2}^\alpha-S}{(A-x_{j_2}^\gamma)^\beta}+\cdots+\frac{nx_{j_n}^\alpha-S}{(A-x_{j_n}^\gamma)^\beta}\geqslant$$

$$\frac{1}{n}(nx_{j_1}^\alpha-S+nx_{j_2}^\alpha-S+\cdots+nx_{j_n}^\alpha-S)\left[\frac{1}{(A-x_{j_1}^\gamma)^\beta}+\frac{1}{(A-x_{j_2}^\gamma)^\beta}+\cdots+\frac{1}{(A-x_{j_n}^\gamma)^\beta}\right]=0.$$

所以当 $\alpha\beta\gamma>0$ 时定理2中不等式成立. 若 $\alpha\beta\gamma<0$, 分4种情况. (Ⅰ) 当 $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma<0$ 时, 有 $nx_{j_1}^\alpha-$

$S \geqslant nx_{j_2}^{\alpha} - S \geqslant \cdots \geqslant nx_{j_n}^{\alpha} - S$, $\frac{1}{(A - x_{j_1}^{\gamma})^{\beta}} \leqslant \frac{1}{(A - x_{j_2}^{\gamma})^{\beta}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{(A - x_{j_n}^{\gamma})^{\beta}}$. (Ⅱ) 当 $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma > 0$ 时, 有 $nx_{j_1}^{\alpha} - S \geqslant nx_{j_2}^{\alpha} - S \geqslant \cdots \geqslant nx_{j_n}^{\alpha} - S$, $\frac{1}{(A - x_{j_1}^{\gamma})^{\beta}} \leqslant \frac{1}{(A - x_{j_2}^{\gamma})^{\beta}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{(A - x_{j_n}^{\gamma})^{\beta}}$. (Ⅲ) 当 $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ 时, 有 $nx_{j_1}^{\alpha} - S \leqslant nx_{j_2}^{\alpha} - S \leqslant \cdots \leqslant nx_{j_n}^{\alpha} - S$, $\frac{1}{(A - x_{j_1}^{\gamma})^{\beta}} \geqslant \frac{1}{(A - x_{j_2}^{\gamma})^{\beta}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{(A - x_{j_n}^{\gamma})^{\beta}}$. (Ⅳ) 当 $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\gamma < 0$ 时, 有 $nx_{j_1}^{\alpha} - S \leqslant nx_{j_2}^{\alpha} - S \leqslant \cdots \leqslant nx_{j_n}^{\alpha} - S$, $\frac{1}{(A - x_{j_1}^{\gamma})^{\beta}} \geqslant \frac{1}{(A - x_{j_2}^{\gamma})^{\beta}} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{(A - x_{j_n}^{\gamma})^{\beta}}$. 综合(Ⅰ)~(Ⅳ)并运用引理中的切比雪夫不等式, 得

$$\frac{nx_{j_1}^{\alpha} - S}{(A - x_{j_1}^{\gamma})^{\beta}} + \frac{nx_{j_2}^{\alpha} - S}{(A - x_{j_2}^{\gamma})^{\beta}} + \cdots + \frac{nx_{j_n}^{\alpha} - S}{(A - x_{j_n}^{\gamma})^{\beta}} \leqslant$$

$$\frac{1}{n}(nx_{j_1}^{\alpha} - S + nx_{j_2}^{\alpha} - S + \cdots + nx_{j_n}^{\alpha} - S)\left[\frac{1}{(A - x_{j_1}^{\gamma})^{\beta}} + \frac{1}{(A - x_{j_2}^{\gamma})^{\beta}} + \cdots + \frac{1}{(A - x_{j_n}^{\gamma})^{\beta}}\right] = 0.$$

所以, 当 $\alpha\beta\gamma < 0$ 时, 定理 2 中反向不等式成立. 综上所述, 定理 2 得证.

在定理 2 中, 令 $n = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 1$, $A = x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, 得到

$$\frac{2(y^2 - z^2) + z^2 - x^2}{z + x} + \frac{2(z^2 - x^2) + x^2 - y^2}{x + y} + \frac{2(x^2 - y^2) + y^2 - z^2}{y + z} \geqslant 0.$$

将上述不等式整理后, 即得 Janous 不等式.

3　结束语

Janous 不等式是继 Shapiro 不等式之后又一具有重要意义的循环不等式. 这两个著名的循环不等式一直颇受人们的青睐. Shapiro 猜想不等式发表于 1954 年的美国数学月刊《American Mathematical Monthly》, 历经 30 多年问题才得以完全解决. 从证明难度和技巧上, Janous 不等式不及 Shapiro 不等式. 但 Janous 不等式有着简洁、优美、结论深刻、内涵丰富, 便于引申和推广等特点, 因而引起数学爱好者强烈的兴趣. 10 多年来, 人们探索 Janous 不等式的证明方法, 从不同角度给出引申和推广, 得到许多新颖有趣的 Janous 型不等式, 从而有效地推动了循环不等式的研究. 本文给出 Janous 不等式指数与项数推广的结果, 蕴涵了许多已知的关于 Janous 不等式的研究成果. 目前, 有关 Janous 不等式加权推广的研究成果甚少, 因此在这方面做一些研究工作有着积极意义.

参　考　文　献

1　Janous W. Problem 1612 [J]. Crux Math. 1991, (17): 43
2　Mitrinović D S, Pečarić J E, Fink A M. Classical and new inequalities in analysis[M]. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic, 1993. 457~458
3　陈　计. 征解问题 4 的推广[J]. 数学通讯, 1996, (3): 48~49
4　黄启林. 从 W. Janous 猜想谈起 [J]. 数学通讯, 2000, (3): 44~45
5　周建国, 王　敢. W. Janous 猜测的推广[J]. 数学通报, 2001, (12): 31~32
6　郝　锋. 对"W. Janous 猜测的推广"的质疑[J]. 数学通报, 2002, (10): 45~46
7　王向东, 苏化明, 王方汉. 不等式理论与方法[M]. 郑州: 河南教育出版社, 1994. 465~479

Power Exponential Generalization of Multivariate Janous Inequality

Wu Shanhe

(Dept. of Math., Longyan College, 364012, Longyan, China)

Abstract　By using ordering inequality and Chebyshev's inequality, the author proves the power exponentially generalized form of multivariate Janous type inequality; and also generalizes the main results of Huang Qilin and others.

Keywords　Janous inequality, orderly inequality, Chebyshev's inequality, exponential, generalization