第 25 卷 第 4 期　　华侨大学学报(自然科学版)　　Vol. 25 No. 4
2004 年 10 月　　Journal of Huaqiao University (Natural Science)　　Oct. 2004

文章编号 1000-5013(2004)04-0352-04

Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数的边界极限

林 峰

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要 设 $h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 到自身的同胚, 讨论 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数在实轴附近的性质, 指出一个现有结果的错误并得到新的结果.

关键词 拟共形映照, Beurling-Ahlfors 扩张, 伸张函数, 边界极限

中图分类号 O 174.55　　文献标识码 A

1 问题的提出

设 $h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 到自身的同胚, $h(\pm\infty)=\pm\infty$. 若满足所谓的 ρ-条件

$$\rho^{-1}\leqslant\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}\leqslant\rho,\qquad\forall x\in\mathbf{R},\quad t>0,$$

则称 $h(x)$ 是 ρ 拟对称函数. 复函数 $\varphi(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 其中

$$u(x,y)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t,\ v(x,y)=\frac{1}{2y}\left(\int_{x}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}h(t)\mathrm{d}t\right)$$

称为 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张. 它是上半平面到自身的拟共形映照. 记 $D(z)=\dfrac{1+d}{1-d}$, 其中

$$d=\frac{|\varphi_{\bar z}|}{|\varphi_z|}=\frac{|(u_x-v_y)+\mathrm{i}(v_x+u_y)|}{|(u_x+v_y)+\mathrm{i}(v_x-u_y)|}.\tag{1}$$

那么, $D(z)$ 称为 $\varphi(z)$ 的伸张函数[1], $D(z)\leqslant 2\rho$ 是现在最好的估计[2,3].

在上述定义中, 如果不满足 ρ-条件, 那么 $D(z)$ 未必有有限的上界. 文[1]研究了伸张函数 $D(z)$ 在实轴附近的局部性质, 得到了当 $h(x)$ 在 x_0 可导, $h'(x_0)>0$ 时, 有 $\lim\limits_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=1$. 由于计算有误, 所以这一结果未必成立. 文[1]还就当 $h(x)$ 在 x_0 的左、右导数都存在且不全为 0 时, 估计了上极限 $\overline{\lim\limits_{y\to 0}}D(x_0+\mathrm{i}y)$ 的上界.

本文就当 $h(x)$ 在 x_0 的左、右导数都存在且不全为 0 时, 给出了极限 $\lim\limits_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)$ 的准确值. 进而, 把条件"$h(x)$ 在 x_0 可导, 且 $h'(x_0)>0$"作为条件"$h(x)$ 在 x_0 的左、右导数都存在, 且不全为 0"的特殊情形. 从而, 直接得到 $\lim\limits_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=2$ 的正确结论. 本文还就 $h'(x_0)=0$ 时, 讨论了极限 $\lim\limits_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)$, 得到新的结果.

2 主要结果

定理 1 设 $h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 到自身的同胚, $h(\pm\infty)=\pm\infty$. $h(x)$ 在 x_0 的左导数 $h^-(x_0)$ 和右导数 $h^+(x_0)$ 都存在且不全为 0. $D(z)$ 是 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张 $\varphi(z)$ 的伸张函数. (i) 当 $H(x_0)\neq+\infty$ 时, 有

$$\lim_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=\frac{5}{8}(H(x_0)+1/H(x_0))+\sqrt{\left[\frac{5}{8}(H(x_0)+1/H(x_0))\right]^2-1}.$$

收稿日期 2004-02-24

作者简介 林 峰(1962-), 男, 高级讲师, 主要从事函数论和数据挖掘的研究. E-mail: lfeng@hqu.edu.cn

(ii) 当 $H(x_0)=+\infty$时, 有

$$\lim_{y\to 0} D(x_0+\mathrm{i}y)=+\infty,$$

$$H(x_0)=\begin{cases}\max(h^+(x_0)/h^-(x_0),\ h^-(x_0)/h^+(x_0)), & h^+(x_0) \text{ 与 } h^-(x_0) \text{ 都不为 0 时},\\ +\infty, & h^+(x_0) \text{ 与 } h^-(x_0) \text{ 有且只有一个为 0 时}.\end{cases}$$

证明　先证(i). 容易求得函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的一阶连续偏导数为

$$u_x=\frac{1}{2y}(h(x+y)-h(x-y)), \tag{2}$$

$$u_y=-\frac{1}{2y^2}\int_{x-y}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2y}(h(x+y)+h(x-y)), \tag{3}$$

$$v_x=\frac{1}{2y}(h(x+y)-2h(x)+h(x-y)), \tag{4}$$

$$v_y=-\frac{1}{2y^2}\left(\int_x^{x+y}h(t)\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}h(t)\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{2y}(h(x+y)-h(x-y)). \tag{5}$$

由于 $h(x)$ 在 x_0 的左导数 $h^-(x_0)$ 和右导数 $h^+(x_0)$ 都存在, 因此在 x_0 的邻域, 有

$$h(x_0+t)=h(x_0)+h^+(x_0)t+o(t),\qquad t>0,$$
$$h(x_0-t)=h(x_0)-h^-(x_0)t+o(t),\qquad t>0.$$

这里 $o(t)$ 是当 $t\to 0$ 时, t 的高阶无穷小. 将上面两个式子应用于式(2)~(5)的各式中, 可得

$$u_x=\frac{1}{2}(h^+(x_0)+h^-(x_0))+o(1),$$

$$u_y=\frac{1}{4}(h^+(x_0)-h^-(x_0))+o(1),$$

$$v_x=\frac{1}{2}(h^+(x_0)-h^-(x_0))+o(1),$$

$$v_y=\frac{1}{4}(h^+(x_0)+h^-(x_0))+o(1).$$

这里, $o(1)$ 是当 $y\to 0$ 时的无穷小. 在点 $x_0+\mathrm{i}y$ 处计算 d^2 的值. 将上述各偏导数代入式(1), 可得

$$d^2=\frac{|(u_x-v_y)+\mathrm{i}(v_x+u_y)|^2}{|(u_x+v_y)+\mathrm{i}(v_x-u_y)|^2}=\frac{5(h^{+2}+h^{-2})-8h^+h^-}{5(h^{+2}+h^{-2})+8h^+h^-}+o(1). \tag{6}$$

于是

$$\frac{1+\lim_{y\to 0}d^2}{1-\lim_{y\to 0}d^2}=\frac{5}{8}\left(\frac{h^+}{h^-}+\frac{h^-}{h^+}\right)=\frac{5}{8}(H(x_0)+1/H(x_0)).$$

记 $D_0=\lim_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)$, 则有

$$D_0+\frac{1}{D_0}=\frac{5}{4}(H(x_0)+1/H(x_0)).$$

解得

$$D_0=\frac{5}{8}(H(x_0)+1/H(x_0))+\sqrt{\left[\frac{5}{8}(H(x_0)+1/H(x_0))\right]^2-1}.$$

再证(ii). 当 $H(x_0)=+\infty$时, 即 $h^+(x_0)$ 与 $h^-(x_0)$ 有且只有一个为 0. 代入式(6), 可得

$$d^2=1+o(1).$$

因此, $\lim_{y\to 0}d=1$. 从而

$$\lim_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=\lim_{y\to 0}\frac{1+d}{1-d}=+\infty.$$

证毕.

定理 2　设 $h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 到自身的同胚. $h(\pm\infty)=\pm\infty$, $h(x)$ 在 x_0 可导, 且 $h'(x_0)>0$. $D(z)$ 是 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张 $\varphi(z)$ 的伸张函数, 则

$$\lim_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=2.$$

证明　因为 $h(x)$ 在 x_0 可导,且 $h'(x_0)>0$,所以

$$H(x_0)=h^+(x_0)/h^-(x_0)=h^-(x_0)/h^+(x_0)=1,$$

$$H(x_0)+1/H(x_0)=2.$$

代入定理1中的(i),立即可得

$$\lim_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=2.$$

证毕.

试例　令 $h(x)=x^3$,则 $h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 到自身的同胚. $h(\pm\infty)=\pm\infty$,且满足 ρ-条件. 此处

$$\rho=(2+\sqrt{3})/(2-\sqrt{3}).$$

当 $x_0\neq 0$ 时,$h'(x_0)=3x_0^2>0$. 直接由式(1)计算,可得在点 $x_0+\mathrm{i}y$ 处,d^2 的值为

$$d^2=\frac{36x_0^4+y^4+412x_0^2y^2}{324x_0^4+49y^4+268x_0^2y^2}.$$

于是

$$\lim_{y\to 0}d^2=\frac{36}{324},\qquad \lim_{y\to 0}d=\frac{1}{3}.$$

从而

$$\lim_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=\frac{1+\lim\limits_{y\to 0}d}{1-\lim\limits_{y\to 0}d}=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2.$$

若令

$$h(x)=\begin{cases}x^3, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

则 $h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 到自身的同胚,$h(\pm\infty)=\pm\infty$. 当 $x_0\neq 0$ 时,$h'(x_0)>0$. 但是,此时 $h(x)$ 不满足 ρ-条件. 事实上有

$$\frac{h(0+t)-h(0)}{h(0)-h(0-t)}=\frac{t^3}{t}=t^2\to\infty,\qquad t\to\infty.$$

由于 $\lim\limits_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)$ 的值,只与 $h(x)$ 在 x_0 的很小邻域内的值有关,故可知下列情况. (1) 当 $x_0>0$ 时,仍有 $\lim\limits_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=2$. (2) 当 $x_0<0$ 时,直接由式(1)计算可得. (3) 当 $y<|x_0|$ 时,有 $d=\frac{1}{3}$,即 $D(x_0+\mathrm{i}y)=2$. 于是也有 $\lim\limits_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=2$.

前面的结果都是在 $h'(x_0)>0$ 的条件下得到的. 若在 x_0 点,有 $h'(x_0)=0$. 那么,当 $y\to\infty$ 时,$D(x_0+\mathrm{i}y)$ 是否存在极限,若极限存在又为何值, 这样的问题目前还没有结果. 我们考察上例中的边界函数 $h(x)=x^3$,在 $x_0=0$ 点,$h(x)$ 满足 $h'(x_0)=h''(x_0)=0$,但 $h'''(x_0)\neq 0$. 对于具有类似性质的一类函数,我们可以得到如下关于 $\lim\limits_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)$ 的一个新的结果.

定理3　设 $h(x)$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 到自身的同胚. $h(\pm\infty)=\pm\infty$, $h(x)$ 在 x_0 可导, 且 $h'(x_0)=0$. $D(z)$ 是 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张 $\varphi(z)$ 的伸张函数. 若存在正整数 n,使 $h(x)$ 在 x_0 有直到 n 阶的导数,且 $h^{(k)}(x_0)=0$, $(k<n)$, 但 $h^{(n)}(x_0)>0$, 则

$$\lim_{y\to 0}D(x_0+\mathrm{i}y)=1+\frac{1}{n}.$$

证明　在 x_0 的邻域,有

$$h(x_0+t)=h(x_0)+\frac{1}{n!}h^{(n)}(x_0)t^n+o(t^n),\qquad t>0.$$

这里的 $o(t^n)$ 是当 $t\to 0$ 时,t^n 的高阶无穷小. 由 $h(x)$ 的单调性知,n 为奇数. 将上面式子应用于式(2)~(5)的各式中,可以得到

$$\left.\begin{aligned}u_x&=\frac{1}{n!}h^{(n)}(x_0)y^{n-1}+o(y^{n-1}),\\ u_y&=o(y^{n-1}),\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= o(y^{n-1}), \\ v_y &= \frac{n}{n+1}\frac{1}{n!}h^{(n)}(x_0)y^{n-1} + o(y^{n-1}). \end{aligned}\right\}$$

这里的 $o(y^{n-1})$ 是当 $y\to 0$ 时, y^{n-1} 的高阶无穷小. 在点 $x_0 + iy$ 处计算 d 的值. 将上述各偏导数代入式(1), 可得

$$d = \frac{\left|\frac{1}{(n+1)!}h^{(n)}(x_0)y^{n-1} + o(y^{n-1}) + io(y^{n-1})\right|}{\left|\frac{2n+1}{(n+1)!}h^{(n)}(x_0)y^{n-1} + o(y^{n-1}) + io(y^{n-1})\right|}.$$

于是

$$\lim_{y\to 0} d = \frac{1}{2n+1}.$$

从而

$$\lim_{y\to 0} D(x_0 + iy) = \frac{1 + \lim_{y\to 0} d}{1 - \lim_{y\to 0} d} = \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = 1 + \frac{1}{n}.$$

证毕.

3　结束语

关于 $h(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数未必存在的情形, 文[1]中运用巧妙的办法得到了伸张函数 $D(z)$ 的边界极限的估计值. 可见, 该文对课题做了较为全面的研究. 本研究得到了部分较好的结果, 包括文[1]中未涉及到的, 关于 $h(x)$ 在点 x_0 处导数为 0 的情形. 虽然如此, 但本文难免受文[1]中思想方法的启发, 在此向该文作者表示诚挚的感谢. 本文中得到的结果, 将在我们的另一项研究工作中得到应用.

参　考　文　献

1　陈志国. Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数的边界性质[J]. 复旦大学学报(自然科学版), 1996, 35(4): 382~386

2　郑学良. Beurling-Ahlfors 扩张的伸张函数与 ID 同胚[J]. 数学学报, 2002, 45(5): 1 036~1 040

3　Lehtinen M. The dilatation of Beurling-Ahlfors extension of quasisymmetric functions[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math., 1983, 8(1): 187~191

Boundary Limit of Dilatation Function of Beurling-Ahlfors Extension

Lin Feng

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362021, Quanzhou, China)

Abstract　Let $h(x)$ be the homeomorphism of real axis **R** onto itself. The author diseusses the properties of $h(x)$ concerning its dilatation function of Beurling-Ahlfors extension in the neighborhood of real axis; and points out an error of existing result and obtains new result.

Keywords　quasiconformal mapping, Beurling-Ahlfors extension, dilatation function, boundary limit