文章编号　1000-5013(2004)04-0349-03

# 四阶抛物型方程的三层恒稳差分格式

曾　文　平

(华侨大学数学系, 福建 泉州 362021)

摘要　为了解四阶抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$, 建立两类新的、具三对角线型系数矩阵的三层隐式差分格式. 其局部截断误差阶均为 $O(\tau^2+h^2+(\frac{\tau}{h})^2)$, 且都是绝对稳定的, 并可用追赶法容易地求解. 数值例子表明这些格式是有效的.

关键词　差分格式, 四阶抛物型方程, 稳定性
中图分类号　O 241.82　　文献标识码　A

考虑下列四阶抛物型方程周期初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, && -\infty<x<\infty, \quad t>0,\\ &u(x,0)=f(x), && -\infty<x<\infty,\\ &u(x+L,t)=u(x,t), && -\infty<x<\infty, \quad t>0,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 $L$ 为周期, $f(x)$ 是周期为 $L$ 的周期函数. 1960 年, Саульев 在文[1]中对方程(1)构造了一个显式格式. 但其稳定性条件为 $r=\tau/h^4\leqslant\frac{1}{8}$, 十分苛刻(其中 $\tau$, $h$ 分别为时间 $t$ 及空间 $x$ 方向的步长). 此外, 他又提出了两个隐式差分格式, 但每前进一步需解一具五对角线型系数矩阵方程组, 较为麻烦. 本文构造了两类新的、三层的、具三对角线型系数矩阵的方程组, 其局部截断误差阶都是 $O(\tau^2+h^2+(\frac{\tau}{h})^2)$. 它们都是绝对稳定的, 并可用追赶法容易地求解. 最后, 数值例子表明这些格式是有效的.

## 1　差分格式的构造

引入如下二阶及四阶中心差分记号, 即

$$\left.\begin{aligned}\delta_x^2 u_j^n &= u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n,\\ \delta_{2x}^2 u_j^n &= u_{j+2}^n-2u_j^n+u_{j-2}^n,\\ \delta_t^2 u_j^n &= u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1},\\ \delta_x^4 u_j^n &= u_{j+2}^n-4u_{j+1}^n+6u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(i) 差分格式(Ⅰ). 有

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}+\frac{\delta_x^4 u_j^n}{h^4}=\varepsilon\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\frac{\delta_x^2\delta_t^2 u_j^n}{\tau^2 h^2}, \tag{3}$$

其中 $\varepsilon>0$ 为待定参数. 显见, 其局部截断误差阶为 $O(\tau^2+h^2+(\frac{\tau}{h})^2)$.

(ii) 差分格式(Ⅱ). 有

收稿日期　2004-01-25
作者简介　曾文平(1940-), 男, 教授, 主要从事偏微分方程数值解和数值代数的研究. E-mail: zengwp@hqu.edu.cn
基金项目　国务院侨务办公室科研基金资助项目(02QZR07)

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}-2\frac{\delta_x^2u_j^{n+1}+\delta_x^2u_j^{n-1}}{h^4}+\frac{\delta_{2x}^2u_j^n}{h^4}=0. \tag{4}$$

在点$(jh, n\tau)$处进行Taylor展开(为简便计算,略去右端项上、下标),可得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+O(\tau^4), \tag{5}$$

$$-2\frac{\delta_x^2u_j^{n+1}+\delta_x^2u_j^{n-1}}{h^4}=\frac{-2}{h^4}\delta_x^2\left(2u+\tau^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+O(\tau^4)\right)=$$

$$-\frac{4}{h^4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{h^2}{90}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}-2\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4}+O\left(h^4+\tau^4+\frac{\tau^4}{h^2}\right), \tag{6}$$

$$\frac{\delta_{2x}^2u_j^n}{h^4}=\frac{4}{h^4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{4}{3}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{8}{45}h^2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}+O(h^4). \tag{7}$$

假设方程(1)的解充分光滑,于是由方程(1)可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=-\frac{\partial^6 u}{\partial t^2\partial x^4}. \tag{8}$$

利用式(5)~式(8),易得格式(Ⅱ)的局部截断误差为

$$R_j^n=-\frac{h^2}{6}\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}-\frac{1}{3}\tau^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+2\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^2\partial x^2}+O\left(\tau^2+h^2+\frac{\tau^4}{h^2}\right)=$$

$$O\left(\tau^2+h^2+\left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right). \tag{9}$$

对于周期边界条件,我们所构造的两个差分格式,都是具三对角线型系数矩阵的线性方程组.它可用三对角线型(具周期边界)追赶法容易地求解.

# 2 稳定性分析

引理[2] 实系数二次方程

$$Ax^2+Bx+C=0,\qquad A>0 \tag{10}$$

的两根按模小于等于1的充要条件为$A-C\geqslant 0$, $A+B+C\geqslant 0$及$A-B+C\geqslant 0$.

现用Fowrier分析法[3]研究差分格式的稳定性.首先有$u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\alpha}\delta_x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\alpha}=-4s^2$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\alpha}\delta_x^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\alpha}=16s^2$.其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, $|\alpha|<\pi$, $s=\sin\frac{\alpha}{2}$.将三层格式写成等价的两层格式后,易得其增长矩阵为$\boldsymbol{G}(\tau, j)=\begin{bmatrix}-\frac{B}{A} & -\frac{C}{A}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.其特征方程为形如式(10)的二次方程.

(i) 格式(Ⅰ)的稳定性.此时特征方程(10)的系数为(当$\varepsilon>0$时)$A=1+8\varepsilon rs^2\geqslant 1>0$, $B=32rs^4-16\varepsilon s^2$, $C=-1+8\varepsilon s^2$.显见,$A-C=2>0$, $A+B+C=32rs^4\geqslant 0$,而$A-B+C=32r(\varepsilon-s^2)s^2$.故当$\varepsilon\geqslant 1$时,$A-B+C\geqslant 0$.因此,当$\varepsilon\geqslant 1$时引理成立.特征方程两根按模小于等于1,即Von Neumann条件成立.由于$A-C>0$不可能有等于1的重根,因此由文[3]可得以下定理.

**定理1** 四阶抛物型方程周期初值问题(1)的三层隐式格式(Ⅰ)(当$\varepsilon\geqslant 1$时)是绝对稳定的.

(ii) 格式(Ⅱ)的稳定性.此时特征方程(10)的系数为$A=1+16rs^2\geqslant 1>0$, $B=-8r\sin^2\theta=-32rs^2+32rs^4$, $C=-1+16rs^2$.显见,$A-C=2>0$, $A+B+C=32rs^4\geqslant 0$, $A-B+C=64rs^2-32rs^4=32rs^2(2-s^2)\geqslant 0$,因而满足引理条件.由引理结论知特征方程的两根按模小于等于1,即Von Neumann条件成立.对任意大于0, $A>C$,故不可能有等于1的重根.因此,由文[3]可得下列定理.

**定理2** 四阶抛物型方程周期初值问题(1)的三层隐式格式(Ⅱ)是绝对稳定的.

值得一提的是由直接验证可知,格式(Ⅱ)为格式(Ⅰ)当$\varepsilon=2$时的特例.这里为说明格式构造方法之不同,故另行列出.

# 3 数值试验

解下列四阶抛物型方程周期初值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, && -\infty< x<+\infty, \quad t>0,\\ &u(x,0)=f(x), && -\infty< x<+\infty,\\ &u(x+2\pi,t)=u(x,t), && -\infty< x<+\infty, \quad t\geqslant 0.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其精确解为 $u(x,t)=e^{-t}\sin x$. 利用格式(Ⅰ)(当 $\varepsilon=1$)及格式(Ⅱ)进行求解. 对于网格函数 $u_0^n, u_1^n, \cdots, u_j^n$, 有 $u_0^n=u_j^n$, 作周期延拓 $u_{-1}^n=u_{j-1}^n$, $u_{-2}^n=u_{j-2}^n$, $\cdots$, $u_{j+1}^n=u_1^n$, $u_{j+2}^n=u_2^n$, $\cdots$, $jh=2\pi$. 而初始条件按直接转移法得 $u_j^0=\sin j\Delta x(j=0,1,\cdots,j)$. 取 $j=64$, 则 $h=\frac{2\pi}{64}=\frac{\pi}{32}$, $\tau=rh^4$. 取 $r=1,4$ 计算到 $n=500$(为简便计算, 第 1 层网格函数值按精确值进行计算). 列出格式(Ⅰ)(当 $\varepsilon=1$ 时)与格式(Ⅱ)的解与精确解的数值结果比较, 如表 1 所示. 比较结果表明, 格式解的精度达 $10^{-4}\sim 10^{-5}$, 我们所作的理论分析是正确的.

表 1　数值结果比较表

| $r$ | 解法 | $5\pi/32$ | $22\pi/32$ | $39\pi/32$ | $56\pi/32$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 精确解 | 0.450 001 90 | 0.793 732 48 | −0.605 600 67 | −0.675 013 99 |
| 1 | 格式Ⅰ | 0.450 035 40 | 0.793 791 57 | −0.605 645 75 | −0.675 064 24 |
| | 格式Ⅱ | 0.450 035 38 | 0.793 791 54 | −0.605 645 73 | −0.675 064 21 |
| | 精确解 | 0.391 469 25 | 0.690 490 11 | −0.526 828 98 | −0.587 213 53 |
| 4 | 格式Ⅰ | 0.391 584 86 | 0.690 694 03 | −0.526 984 57 | −0.587 386 99 |
| | 格式Ⅱ | 0.391 583 81 | 0.690 692 18 | −0.526 983 16 | −0.587 385 42 |

最后, 必须指出的是, 当 $\tau=O(h^2)$时, 格式(Ⅰ)与格式(Ⅱ)的截断误差阶均为 $O(\tau^2+h^2+(\frac{\tau}{h})^2)=O(h^2)$. 此时, 两格式均相容于方程(1). 而由定理 1 及定理 2 可知, 这两个格式也是绝对稳定的. 因此, 再由 Lax 的稳定性与收敛性等价定理可知, 当 $\tau=O(h^2)$时, 格式(Ⅰ)与格式(Ⅱ)也是收敛的.

## 参　考　文　献

1 Саульев В К 著. 抛物型方程的网格积分法[M]. 袁兆鼎译, 北京: 科学出版社, 1963. 143~152

2 Miller J J H. On the location of zeros of certain classes of polynomials with application to numerical analysis[J]. J. Inst. Math. Appls., 1971, 8: 394~406

3 Richtmyer R D, Morton K W. Difference method for initial-value problems[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1967. 38~183

# Three Layered Steady Difference Scheme for Solving Four Order Parabolic Equation

Zeng Wenping

(Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362021, Quanzhou, China)

**Abstract**　For solving four order parabolic equation $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$, the author advances two new classes of three layered implicit difference scheme with coefficient matrix of tridiagonal type. The local truncation error of these schemes are all in the order of $O(\tau^2+h^2)$. They are all absolutely stable and can easily be solved by speed-up method. They are indicated by numerical example to be effective.

**Keywords**　difference scheme, four order parabolic equation, stability