文章编号 1000-5013(2004)04-0343-06

可延拓成 N 类函数的极值问题

龙波涌 黄心中

(华侨大学数学系,福建 泉州 362021)

摘要 对 N 类函数的性质进行进一步的研究,得到一些可延托成 N 类函数的判别条件.结果指出,Reich 在相应文献中所提出的充分条件并非必要的.利用给出的一些延拓的方法,找到某些可延拓成类函数的函数类,其再次延拓后的模是减少的.

关键词 N 类函数,模,延拓,极值拟共形映照

中图分类号 O 175.55 **文献标识码** A

1 背景介绍

设 $k(z)$为有界可测的复值函数,$z\in U=\{z|\,|z|<1\}$.记 $B=\{f(z)|\,f(z)$于 U 内解析,且 $\|f\|_U<\infty\}$,其中 $\|f\|_U=\iint_U|f(z)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.考虑泛函 $L_k[f(z)]=\iint_U k(z)f(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(z)\in B$. U 上的 N 类函数可定义为设 $k(z)$是 U 上的有界可测函数.若对任何 $f\in B$,恒有 $L_k[f]=0$,则称 $k(z)\in N$.

在对极值拟共形的复特征 $u(z)$的研究中,Ahlfors[1]提出了 N 类函数的概念并给出了一些刻画;后来许多的专家与学者对相关的问题都相继作了研究和探索[2~5].关于 N 类函数的性质,Reich 给出了一个定理[5],说明若 $u(z)$是一个拟共形映照的复特征,但它不是极值的,当且仅当存在一个 $v(z)\in N$,使得 $\|u(z)-v(z)\|_\infty<\|u(z)\|_\infty$.从而,说明研究 N 类函数的性质对研究极值拟共形映照有着重要的意义.

显然,对于 N 类函数,有关系式

$$v(z)\in N\Leftrightarrow\iint_U v(z)z^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\qquad n=0,1,2,\cdots. \tag{1}$$

在文[5]中,Reich 证明

定理 A 设 $\alpha(z)$为 $U_\rho=\{z|\,|z|<\rho,0<\rho<1\}$上的有界可测的复值函数,则存在一个唯一的 $\beta(z)$,于 $\rho<|z|\le\infty$中解析,使得

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases} \tag{2}$$

且 $v(z)\in N$ 类.其中 $\beta(z)=-\dfrac{1}{1-\rho^2}zP(z)$, $P(z)=-\dfrac{1}{\pi}\iint_{|\xi|<\rho}\dfrac{\alpha(\zeta)}{\xi-z}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta$, $\rho<|z|<\infty$.

上述定理解决了给定圆盘 $U_\rho=\{z|\,|z|<\rho,\ 0<\rho<1\}$上的有界可测函数,其可以向外延拓成单位园盘上的 N 类函数的问题.记 U_ρ 上的有界可测且向外延拓成 N 类函数的函数类为 F_2,则由定理 A 可知,U_ρ 上的一切有界可测的复值函数均属于 F_2.

另一方面,设 $\beta(z)$为 $A_\rho=\{z|\,\rho<|z|<1,0<\rho<1\}$上的有界可测的复值函数.是否存在一个 $U_\rho=\{z|\,|z|<\rho,0<\rho<1\}$上的有界可测的复值函数 $\alpha(z)$,使得式(2)属于 N 类.对于该问题,Reich[5]证明了下面的两个定理.

收稿日期 2004-03-17

作者简介 龙波涌(1974-),男,硕士研究生,主要从事函数论的研究. E-mail: lbymxy@163.com

定理 B 设 $\beta(z)$ 是 $A_\rho=\{z|\rho<|z|<1,0<\rho<1\}$ 上的有界可测的复值函数. 令

$$b_n = \iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad n=0,1,2,\cdots,\tag{3}$$

则 $\beta(z)$ 可以向内延拓成 N 类函数的必要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}\le\rho,\tag{4}$$

而充分条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}<\rho.\tag{5}$$

定理 C 设 $\beta(z)$ 是 $A_\rho=\{z|\rho<|z|<1,0<\rho<1\}$ 上的有界可测的复值函数. 令

$$b_n = \iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad n=0,1,2,\cdots,\tag{3}$$

则 $\beta(z)$ 可以向内延拓成 N 类函数的必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{|b_n|^2}{\rho^{2n}}<\infty,\tag{6}$$

而充分条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{|b_n|}{\rho^{n}}<\infty.\tag{7}$$

记 A_ρ 上的有界可测且可向内延拓成 N 类函数的函数类为 F_1.

在定理 B 的充分条件的证明中,Reich 给出了 $\beta(z)$ 的一个延拓为

$$\alpha(re^{i\theta})=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)b_n}{2\pi\rho^{n+2}}e^{-in\theta},\qquad 0\le r<\rho<1,\quad 0\le\theta<2\pi.\tag{8}$$

本文将研究下列的问题. (1) 进一步研究可向内延拓的条件,且考虑延拓是否唯一. 设 $f(z)$ 是 U 到 U 上的拟共形映照且以 $u(z)$ 为复特征. 我们知道,一定存在一个极值拟共形映照 $f^{u_1(z)}(z)$,满足 $f^{u(z)}|_{\partial U}=f^{u_1(z)}|_{\partial U}$ 且 $\|u_1(z)\|_\infty\le\|u(z)\|_\infty$. 对极值拟共形映照的研究已得到了许多很好的结果[6,7]. (2) 给定 $\beta(z)\in F_1$. 是否存在另一个函数 $\beta_1(z)\in F_1$,使得 $\|\beta_1(z)\|_\infty\le\|\beta(z)\|_\infty$. (3) 给定 $\alpha(z)\in F_2$,研究是否存在另一个函数 $\alpha_1(z)\in F_2$,使得 $\|\alpha_1(z)\|_\infty\le\|\alpha(z)\|_\infty$.

本文将在研究 N 类函数的性质的基础上,部分的解决上述问题.

2 主要结果

对于定理 A,文[5]是用积分表示的方法来证明的. 以下,我们给出一个更简洁的证明. 为此令

$$b_n=\iint_{|z|<\rho}\alpha(z)z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad n=0,1,2,\cdots,\tag{9}$$

则 $|b_n|\le\frac{2\pi}{n+2}\rho^{n+2}\|\alpha(z)\|_\infty$, $\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}\le\rho$.

令 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}b_nz^n$,则 $g(z)$ 在 $|z|<\frac{1}{\rho}$ 内收敛、解析. 故 $g(\frac{1}{z})$ 在 $|z|>\rho$ 上解析. 令

$$\beta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}b_nz^{-n},\tag{10}$$

考虑式(1),易证

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

属于 N 类. 其中

$$\beta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}b_nz^{-n}=-\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\iint_{|\xi|<\rho}\alpha(\xi)\xi^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)z^{-n}=$$

$$-\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}\iint_{|\xi|<\rho}\alpha(\xi)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{z}\right)^n\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{z}{\pi(1-\rho^2)}\iint_{|\xi|<\rho}\frac{\alpha(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这就是定理 A 中 $\beta(z)$ 的表达式.

相应于定理 A 中 $\alpha(z)$ 的解析延拓,我们将证明以下的

定理 1　设 $\beta(z)$ 是 $A_\rho=\{z|\rho<|z|<1, 0<\rho<1\}$ 上的有界可测的复值函数. 令

$$b_n=\iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

则当 $\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{|b_n|}{\rho^n}<+\infty$ 时,存在唯一的 $\alpha(z)$,在 $U_\rho=\{z||z|<\rho, 0<\rho<1\}$ 上是有界解析函数的共轭. 它使得

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

且 $v(z)\in N$ 类. 这里

$$\alpha(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)b_n}{\pi\rho^{2n+2}}(\bar{z})^n. \tag{11}$$

证明　设 $\beta(z)$ 是满足定理 1 条件的函数,根据定理 C, $\beta(z)$ 可延拓. 取 $\phi(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\bar{b}_n}{\pi\rho^{2n+2}}z^n$. 由假设 $\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{|b_n|}{\rho^n}<+\infty$,则 $\phi(z)$ 为 $U_\rho=\{z||z|<\rho, 0<\rho<1\}$ 上的有界解析函数. 取 $\alpha(z)=\overline{\phi(z)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)b_n}{\pi\rho^{2n+2}}(\bar{z})^n$,再令

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

则易证式(1)右边成立, $v(z)\in N$. 根据解析函数的唯一性定理, $v(z)$ 就是满足定理 1 条件的唯一函数. 证毕.

附注　根据定理 B 及定理 1 的证明,说明 $\beta(z)$ 的延拓不是唯一的.

对于定理 B 的条件(5),是否能成为 $\beta(z)$ 向内延拓成 N 类函数充要条件. 对此,我们将证明如下的定理.

定理 2　设 $\beta(z)$ 是 $A_\rho=\{z|\rho<|z|<1, 0<\rho<1\}$ 上的有界可测的复值函数. 令

$$b_n=\iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}<\rho$ 不是 $\beta(z)$ 向内延拓成 N 类函数的充要条件.

证明　对于给定的 $\beta(z)$,令 $b_n=\iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $n=0,1,2,\cdots$. 则由定理 B, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}<\rho$ 是 $\beta(z)$ 向内延拓成 N 类函数的充分条件. 但是,若取

$$\beta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\pi(1-\rho^{2n+2})n^{2+\alpha}}(\rho\bar{z})^n,\qquad \alpha>0,\quad \rho<|z|<1, \tag{12}$$

则 $\beta(z)$ 是 A_ρ 上的有界可测的复值函数. 容易知到 $b_n=\iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\rho^n}{n^{2+\alpha}}$, $n=0,1,2,\cdots$, 且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}=\rho$. 依照定理 1 的延拓方法,令

$$\alpha(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\pi\rho^{2n+2}}b_n(\bar{z})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\pi\rho^{2n+2}n^{2+\alpha}}(\bar{z})^n,$$

则 $\alpha(z)$ 为 $\{z||z|\leq\rho$ 上的有界可测复值函数. 再令

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

则考虑式(1),容易证明 $v(z)\in N$ 类. 由此可见,条件 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}<\rho$ 不是 $\beta(z)$ 向内延拓成 N 类函数的必要条件. 证毕.

更进一步,我们将证明如下的定理.

定理 3　设 $\beta(z)$ 是 $A_\rho=\{z|\rho<|z|<1, 0<\rho<1\}$ 上的有界可测的复值函数. 令 $b_n=$

$\iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $n=0,1,2,\cdots$. 若当 $n\to\infty$时,有

$$|b_n| = O(\frac{\rho^n}{n^{2+\alpha}}), \tag{13}$$

其中 $\alpha>0$ 为常数,则 $\beta(z)$ 可向内延拓成 N 类函数的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{|b_n|}{\rho^n}<\infty$.

证明 (1) 充分性. 当 $n\to\infty$时, 若$|b_n| = O(\frac{\rho^n}{n^{2+\alpha}})$,则存在正整数 N 及常数 C, $0<C<\infty$, 当 $n>N$ 时,有$|b_n|\le C\frac{\rho^n}{n^{2+\alpha}}$. 因 $b_n=\iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $n=0,1,2,\cdots$,则

$$|b_n|\le\frac{2\pi(1-\rho^{n+2})}{n+2}\|\beta(z)\|_\infty<\infty,\qquad \sum_{n=1}^{N}n\frac{|b_n|}{\rho^n}=M<\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{|b_n|}{\rho^n}=\sum_{n=1}^{N}n\frac{|b_n|}{\rho^n}+\sum_{n=N+1}^{\infty}n\frac{|b_n|}{\rho^n}\le M+\sum_{n=N+1}^{\infty}nC\frac{\frac{\rho^n}{n^{2+\alpha}}}{\rho^n}=M+C\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}<\infty.$$

再考虑定理 C,可知 $\beta(z)$ 可延拓.

(2) 必要性. 由定理 B 知, $\beta(z)$ 可向内延拓成 N 函数的必要条件是$\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}\le\rho$. 此条件显然包含了条件(13),故条件(13)是 $\beta(z)$ 可向内延拓成 N 类函数的必要条件.

综上所述,定理获证.

对于问题 2,我们将证下列的

定理 4 设 $\beta(z)$ 是 $A_\rho=\{z|\rho<|z|<1, 0<\rho<1\}$上的有界可测的复值函数,且 $\beta(z)\in F_1$. 令 $b_n=\iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $n=0,1,2,\cdots$. 当 $\|\beta\|_\infty\ge\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}\sum_{n=0}^{N}n\frac{|b_n|}{\rho^n}$时,存在 $\beta(z)\in F_1$,使得 $\|\beta_1(z)\|_\infty\le\|\beta(z)\|_\infty$

证明 对于给定的 $\beta(z)\in F_1$,由定理 1,取延拓 $\alpha(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)b_n}{\pi\rho^{2n+2}}(\bar{z})^n$, $|z|<\rho$. 令

$$a_n=\iint_{|z|<\rho}\alpha(z)z^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad n=0,1,2,\cdots, \tag{14}$$

则

$$a_n=-\iint_{|z|<\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)b_k}{\pi\rho^{2k+2}}(\bar{z})^k z^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$-\frac{(n+1)b_n}{\pi\rho^{2n+2}}\iint_{|z|<\rho}|z|^{2n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-b_n,\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

若令

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

则由式(1)可知, $v(z)\in N$ 类.

另一方面,对于上面的 $\alpha(z)$,根据定理 A,又可再取延拓 $\beta_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}b_n z^{-n}$, $0<\rho<|z|<1$. 若令

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta_1(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

则 $v(z)\in N$类,即$\beta_1(z)\in F_1$,且$\sup_{\rho<|z|<1}|\beta_1(z)|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}\frac{|b_n|}{\rho^n}$. 由假定条件 $\|\beta\|_\infty\ge\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|b_n|}{\rho^n}$,则有 $\|\beta_1(z)\|_\infty\le\|\beta(z)\|_\infty$. 证毕.

接下来,对于问题 3,我们有定理 5.

定理 5　设 $\alpha(z)$ 是 $U_\rho=\{z\,|\,|z|<\rho,0<\rho<1\}$ 上的有界可测的复值函数. 令

$$b_n=-\iint_{|z|<\rho}\alpha(z)z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

则当 $\|\alpha(z)\|_\infty\geq\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)|b_n|}{\rho^{n+2}}$ 时,存在 $\alpha_1(z)\in F_2$, 使得 $\|\alpha_1(z)\|_\infty\leq\|\alpha(z)\|_\infty$.

证明　对于给定的 $\alpha(z)$,根据定理 A,取

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

使 $v(z)\in N$ 类,其中 $\beta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}b_nz^{-n}$.

另一方面,对上面的 $\beta(z)$,令

$$b_n'=\iint_{\rho<|z|<1}\beta(z)z^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

则 $b_n'=\iint_{\rho<|z|<1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}b_kz^{-k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=b_n$. 又因 $b_n=-\iint_{|z|<\rho}\alpha(z)z^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n'|^{\frac{1}{n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}\leq\rho$. 定理 B 可知,对于 $\beta(z)$,若令

$$v(z)=\begin{cases}\alpha_1(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

则 $v(z)\in N$ 类. 其中 $\alpha_1(re^{i\theta})=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)b_n}{2\pi\rho^{n+2}}e^{-in\theta}$, $0\leq r<\rho<1$, $0\leq\theta<2\pi$. 则 $\sup_{|z|<\rho}|\alpha_1(z)|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)|b_n|}{2\pi\rho^{n+2}}$ 由假定条件 $\|\alpha(z)\|_\infty\geq\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)|b_n|}{\rho^{n+2}}$,则 $\|\alpha_1(z)\|_\infty\leq\|\alpha(z)\|_\infty$. 证毕.

同理,我们可以举例说明满足定理 5 的条件的函数 $\alpha(z)$ 存在.

能满足定理 4 的条件的函数 $\beta(z)$ 一定存在. 可参见下面的例子.

例 1　设 $\beta^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是 $|z|\leq1$ 上有界的解析函数. 令 $\beta(z)=\beta^*(z)$, $\rho<|z|<1$, $0<\rho<1$ 则

$$b_n=\begin{cases}a_0\pi(1-\rho^2), & n=0,\\ 0, & n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

显然, $\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}=0<\rho$,故 $\beta(z)\in F_1$. 即 $\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|b_n|}{\rho^n}=|a_0|$. 根据解析函数的最大模原理,有 $|a_0|=\|\beta^*(0)\|\leq\max_{|z|=1}|\beta^*(z)|=\|\beta(z)\|_\infty$,即满足假定的条件 $\|\beta(z)\|_\infty\geq\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|b_n|}{\rho^n}$. 按照定理 4 的证明过程所示,可以找到 $\beta_1(z)=a_0$,则有 $\|\beta_1(z)\|_\infty\leq\|\beta(z)\|_\infty$.

更进一步的例子,还可以使 $\|\beta_1(z)\|_\infty<\|\beta(z)\|_\infty$.

例 2　取 $\beta(z)=|z|\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\rho^2|z|\bar{z})^n$, $\rho<|z|<1$, $0<\rho<1$. 则

$$\sup_{\rho<|z|<1}|\beta(z)|=\frac{1}{(1-\rho^2)^2},$$

$$b_n=\frac{2}{3}\pi(1-\rho^{3n+3})\rho^{2n},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|b_n|^{\frac{1}{n}}=\rho^2<\rho,$$

$\beta(z)\in F_1$. 通过简单计算可知, $\frac{1}{(1-\rho^2)^2}>\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(1-\rho^{3n+3})\rho^{2n}}{3(1-\rho^2)\rho^n}$,即 $\|\beta\|_\infty>\frac{1}{\pi(1-\rho^2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|b_n|}{\rho^n}$ 成立. 按照定理 4 的证明过程所示,可以找到 $\beta_1(z)=\frac{1}{1-\rho^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(1-\rho^{3n+3})\rho^{2n}}{3z^n}$,则有 $\|\beta_1(z)\|_\infty<\|\beta(z)\|_\infty$.

例 3　设 $\alpha^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 是 $|z|\leq1$ 中的有界解析函数. 在 $U_\rho=\{z\,|\,|z|<\rho,0<\rho<1\}$ 上,取 $\alpha(z)=\alpha^*(z)$. 按照定理 5 的证明过程所示,可以找到 $\beta(z)=-\frac{\rho^2}{1-\rho^2}a_0$,令

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

则 $v(z)\in N$ **类. 对于找到的** $\beta(z)$ **,取** $\alpha_1(z)=a_0$. **再令**

$$v(z)=\begin{cases}\alpha_1(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

则 $v(z)\in N$ **类. 考虑解析函数的最大模原理,则有** $\|\alpha_1(z)\|_\infty\leq\|\alpha(z)\|_\infty$.

例 4 取 $\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_0(\bar{z})^n$, $n=0,1,2,\cdots$,**其中**,$|z|<\rho$ **所有的** $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ **为非负实数. 按定理** 5 **的证明过程所示,可找到** $\beta(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\rho^{2n+2}}{(n+1)(1-\rho^2)}z^{-n}$. **令**

$$v(z)=\begin{cases}\alpha(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

则 $v(z)\in N$ **类. 对于找到的** $\beta(z)$ **,取** $\alpha_1(re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)a_0\rho^n}{2(n+1)}e^{-in\theta}$, $|z|<\rho<1$. **再令**

$$v(z)=\begin{cases}\alpha_1(z), & |z|<\rho,\\ \beta(z), & \rho<|z|<1,\end{cases}$$

则 $v(z)\in N$ **类. 考虑解析函数的最大模原理,则有** $\|\alpha_1(z)\|_\infty\leq\|\alpha(z)\|_\infty$.

参 考 文 献

1 Ahlfors L V. Some remarker on Teichmuller's space of Riemann surfaces[J]. Ann. of Math. ,1961,74(1):171～191

2 Reich E, Strebel K. On quasiconformal mappings which keep the boundary points fixed[J]. Trans. Amer. Math. Soc. , 1969,138:211～222

3 Reich E. On the mapping with complex dilatation [J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. ,1987,12:261～267

4 Cieslak W, Zajac J. Remarks on the Ahlfors class N in an annulus[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. ,1976,2:429～445

5 Reich E. An extremun problem for analytic functions with area norms[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. , 1976, 2:429～445

6 Hamilton R S. Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values[J]. Trans. Amer. Math. Soc. ,1969,138:399～406

7 Reich E, Strebel K. Extremal quasiconformal mappings with given boundary values: Contributions to analysis[M]. New York: Academic Press,1974. 375～391

Extremal Problems for Some Functions to be Extended into Class N

Long Boyong Huang Xinzhong

(Dept. of Math. , Huaqiao Univ. , 362021, Quanzhou, China)

Abstract By further studying the property of the functions of class N, the authors obtain some conditions for discrimi-nating the functions which can be extended inward into class N. As shown by the results, the sufficient condition given by Reich in corresponding literature is unnecessary. By using some methods of extension given in this paper, the authors have found certain class of functions which can be extended into function of class N; and the essential norms of which are reduced after extending once again.

Keywords function of class N, norm, extension, extremal quasiconformal mapping