第25卷 第3期 华侨大学学报(自然科学版) Vol.25 No.3
2004年7月 Journal of Huaqiao University (Natural Science) Jul.2004

文章编号 1000-5013(2004)03-0247-04

具时滞的中立型泛函微分方程的概周期解

方聪娜[①] 王全义[②]

(①集美大学基础教学部,福建 厦门 361021;②华侨大学数学系,福建 泉州 362021)

摘要 研究一类具时滞的中立型泛函微分方程的概周期解,利用不动点定理及指数型二分性,得到其概周期解的存在唯一性及稳定性.

关键词 中立型泛函微分方程,概周期解,存在性,唯一性,稳定性

中图分类号 O175.1 **文献标识码** A

泛函微分方程概周期解的存在性问题一直是很多数学家所关心的问题[1~3].近来,文[4]给出了保证微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x) + g(t, x) \tag{1}$$

的概周期解的存在性、唯一性、稳定性与不稳定性的充分条件.文[5]研究了具有无限时滞的泛函微分方程

$$x'(t) = F(t, x(t), x_t) \tag{2}$$

的概周期解的存在唯一性及稳定性.本文将研究另一类具时滞的中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t) - b(t)x(t - r)) = A(t)x(t) + f(t, x_t) \tag{3}$$

的概周期解的存在唯一性及稳定性问题.其中 $A(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 $n\times n$ 连续概周期函数矩阵.$b(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的连续概周期函数.$x_t \in C([-r,0],\mathbf{R}^n)$.$x_t(\theta) = x(t+\theta)(-r\le\theta\le 0)$.$f(t,\phi)$ 是 $\mathbf{R}\times C([-r,0],\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的连续函数矩阵,且关于 t 对 $\phi\in D_1$(D_1 为 $C([-r,0],\mathbf{R}^n)$ 中的任一紧子集)是一致概周期的.利用不动点定理及指数型二分性,得到了方程(3)概周期解的存在唯一性及一致稳定性.

1 一些引理

考虑如下概周期系统

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{4}$$

和

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t). \tag{5}$$

这里 $A(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 $n\times n$ 连续概周期函数矩阵,$g(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 n 维连续概周期函数向量.由文[6]的引理2.1可得下列引理.

引理1 设 $X(t)$ 是式(4)的基本解矩阵.若 $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n\times n}$ 满足条件(A1),即存在正的可微函数 $d_i(t)$($d_1\le d_i(t)\le d_2$,d_1,d_2 为正的常数,$i=1,2,\cdots,n$ 及概周期函数 $a_1(t)$ 使得

$$d_j'(t) + d_j(t)a_{jj}(t) + \sum_{i=1,i\ne j}^{n} |a_{ij}(t)|\, d_i(t) \le a_1(t)d_j(t), \qquad j = 1,2,\cdots,n.$$

或者满足条件(A2),即存在正的可微函数 $\tilde{d}_i(t)$($\tilde{d}_1\le\tilde{d}_i(t)\le\tilde{d}_2$,$\tilde{d}_1\tilde{d}_2$ 为正的常数,$i=1,2,\cdots,n$,及概周

收稿日期 2003-12-12

作者简介 方聪娜(1977-),女,助教,硕士研究生,主要从事常微分方程和泛函微分方程的研究.E-mail:fcn1002@sina.com

基金项目 国务院侨务办公室科研基金资助项目(01QZR02)

期函数 $a_2(t)$ 使得

$$\tilde{d}_j'(t) + \tilde{d}_j(t)a_{jj}(t) - \sum_{i=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}(t)|\tilde{d}_i(t) \geq a_2(t)\tilde{d}_j(t), \qquad j = 1,2,\cdots,n.$$

那么,有

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq \frac{d_2}{d_1}\exp\left(\int_s^t a_1(r)\mathrm{d}r\right), \qquad t \geq s, \tag{6}$$

或

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq \frac{\tilde{d}_2}{\tilde{d}_1}\exp\left(\int_s^t a_2(r)\mathrm{d}r\right), \qquad s \geq t. \tag{7}$$

引理 2 设 $a(t)$ 是概周期函数,若它的平均值 $M[a(t)] = \lim_{t-s\to+\infty}\int_s^t a(\tau)\mathrm{d}\tau = \alpha_0 < 0$,则存在正常数 α,β 使得 $\exp\left(\int_s^t a(r)\mathrm{d}r\right) \leq \beta\exp(-\alpha(t-s))$, $t \geq s$.

引理 3 对于系统(5),若 $A(t)$ 满足引理 1 中的条件(A1)且 $a_1(t)$ 的平均值

$$M[a_1(t)] = \lim_{t-s\to+\infty}\frac{1}{(t-s)}\int_s^t a_1(\tau)\mathrm{d}\tau = c_1 < 0, \tag{8}$$

则系统(5)存在唯一的概周期解

$$x(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s. \tag{9}$$

若 $A(t)$ 满足引理 1 中的条件(A2)且 $a_2(t)$ 的平均值

$$M[a_2(t)] = \lim_{t-s\to+\infty}\frac{1}{(t-s)}\int_s^t a_2(\tau)\mathrm{d}\tau = c_2 > 0, \tag{10}$$

则系统(5)存在唯一的概周期解

$$x(t) = -\int_t^{\infty} X(t)X^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s. \tag{11}$$

证 由式(8)(或式(10))及引理 1 的式(6)(或式(7))及引理 2 可知方程(4)具有指数型二分性. 又由文[7]中的定理 7.7 可知系统(5)存在唯一的概周期解,且它可由式(9)或式(11)表示. 证毕.

记 $D = \{V(t) \mid V: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ 为连续概周期函数$\}$. 那么,D 在范数 $\|V\| = \sup_{t\in\mathbf{R}}\{\|V(t)\|\}$ 下是一个 Banach 空间.

2 主要结果

定理 1 如果(1) $A(t)$ 满足引理 1 中的条件(A1) 且 $A_1(t)$ 的平均值 $M[a_1(t)] < 0$;(2) 存在定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续概周期函数 $h(t) \geq 0$,使得对 $\forall \phi, \Psi \in C([-r,0],\mathbf{R}^n)$,有

$$\|f(t,\phi) - f(t,\Psi)\| \leq h(t)\|\phi - \Psi\|;$$

(3) 存在着正常数 K 满足 $K(1-B) > \frac{d_2}{d_1}$,使得对 $\forall t \in \mathbf{R}$ 有

$$a_1(t) + K[\|b(t)A(t)\| + h(t)] \leq 0,$$

其中,$B = \sup_{t\in\mathbf{R}}\{|b(t)|\}$,则方程(3)存在唯一的一致稳定的概周期解.

推论1 如果定理1中的条件被满足,且 $\forall t \in \mathbf{R}$, $A(t+T) = A(t)$, $b(t+T) = b(t)$; $\forall (t,\phi) \in \mathbf{R}\times C([-r,0],\mathbf{R}^n)$, $f(t+T,\phi) = f(t,\phi)$,则方程(3)存在唯一的一致稳定的 T-周期解.

定理 2 如果(i) $A(t)$ 满足引理 1 中的条件 A2 且 $a_2(t)$ 的平均值 $M[a_2(t)] > 0$;(ii) 存在定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续概周期函数 $h(t) \geq 0$,使得对 $\forall \phi, \Psi \in C([-r,0],\mathbf{R}^n)$,有

$$\|f(t,\phi) - f(t,\Psi)\| \leq h(t)\|\phi - \Psi\|;$$

(iii) 存在着正常数 K 满足 $K(1-B) > \frac{\tilde{d}_2}{\tilde{d}_1}$,使得对 $\forall t \in \mathbf{R}$,有

$$a_2(t) - K[\|b(t)A(t)\| + h(t)] \geq 0,$$

其中 $B=\sup_{t\in\mathbf{R}}\{|b(t)|\}$, 则方程(3)存在唯一的概周期解.

推论 2　如果定理 2 中的条件被满足, 且 $\forall t\in\mathbf{R}$, $A(t+T)=A(t)$, $b(t+T)=b(t)$. $\forall(t,\phi)\in\mathbf{R}\times C([-r,0],\mathbf{R}^n)$, $f(t+T,\phi)=f(t,\phi)$, 则方程(3)存在唯一的 T-周期解.

3　定理的证明

(Ⅰ) 定理 1 的证明. 因为对任意的 $V\in D$, $f(t,V_t)$ 是连续概周期函数, 故考虑如下概周期系统

$$x'(t)=A(t)x(t)+b(t)A(t)V(t-r)+f(t,V_t). \tag{12}$$

由条件(i)及引理 3 可知, 系统(12)存在唯一的概周期解 $x_V(t)=\int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(s)[b(s)A(s)V(s-r)+f(s,V_s)]ds$, 其中 $X(t)$ 是方程 $x'(t)=A(t)x(t)$ 的基本解矩阵. 对 $\forall V\in D$, 记 $y_V(t)=b(t)V(t-r)+x_V(t)=b(t)V(t-r)+\int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(s)[b(s)A(s)V(s-r)+f(s,V_s)]ds$, 则 $y_V(t)$ 也是连续概周期函数. 现在定义算子 $H:D\to D$ 为 $HV(t)=y_V(t)\ (\forall V\in D)$. 下面证明 $H:D\to D$ 是一个压缩映射. 事实上, 对 $\forall V_1, V_2\in D$, 由条件(i), (ii)及(iii)可得

$$\|HV_1(t)-HV_2(t)\|\le|b(t)|\cdot\|V_1(t-r)-V_2(t-r)\|+$$
$$\int_{-\infty}^{t}\|X(t)X^{-1}(s)\|\cdot[\|b(s)A(s)\|\cdot\|V_1(s-r)-V_2(s-r)\|+\|f(s,V_{1s})-f(s,V_{2s})\|]ds\le$$
$$B\|V_1-V_2\|+\frac{d_2}{d_1}\cdot\|V_1-V_2\|\cdot\int_{-\infty}^{t}\exp\left(\int_t^s a_1(\tau)d\tau\right)\cdot\left(-\frac{a_1(s)}{K}\right)ds=$$
$$\left(B+\frac{d_2}{d_1}\cdot\frac{1}{K}\right)\|V_1-V_2\|,$$

于是 $\|HV_1-HV_2\|\le\left(B+\frac{d_2}{d_1}\cdot\frac{1}{K}\right)\|V_1-V_2\|$, 由条件(iii)可知 H 是 D 上的压缩映射, 利用压缩映射原理知, H 在 D 中存在唯一的不动点 $y(t)$ 使得

$$y(t)=b(t)y(t-r)+\int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(s)[b(s)A(s)y(s-r)+f(s,y_s)]ds,$$

移项得

$$y(t)-b(s)y(t-r)=\int_{-\infty}^{t}X(t)X^{-1}(s)[b(s)A(s)y(s-r)+f(s,y_s)]ds. \tag{13}$$

从式(13)的右边可知, $y(t)-b(t)y(t-r)$ 是连续可微的, 并且直接从式(13)的两边对 t 求导即知 $y(t)$ 满足方程(3), 即 $y(t)$ 是方程(3)唯一的概周期解. 下面证明方程(3)的任一解都是一致稳定的. 把方程(3)写成如下的形式. 即

$$\frac{d}{dt}Dx_t=A(t)Dx_t+b(t)A(t)x(t-r)+f(t,x_t), \tag{14}$$

其中 $Dx_t=x(t)-b(t)x(t-r)$. 对 $\forall t_0\ge0$. 设方程(14)的解 $x(t)=x(t,t_0,\Psi_1)$, $\bar{x}(t)=x(t,t_0,\Psi_2)$ 分别具有连续的初始函数 $\Psi_1:[t_0-r,t_0]\to\mathbf{R}^n$, $\Psi_2:[t_0-r,t_0]\to\mathbf{R}^n$, 由常数变易法可知

$$Dx_t=X(t)X^{-1}(t_0)Dx_{t_0}+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(s)\cdot[b(s)A(s)x(s-r)+f(s,x_s)]ds,\qquad t\ge t_0. \tag{15}$$

$$D\bar{x}_t=X(t)X^{-1}(t_0)D\bar{x}_{t_0}+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(s)\cdot[b(s)A(s)\bar{x}(s-r)+f(s,\bar{x}_s)]ds,\qquad t\ge t_0, \tag{16}$$

在式(16)中, $X(t)$ 是方程

$$x'(t)=A(t)x(t)$$

的基本解矩阵. 由式(15), (16)得

$$x(t,t_0,\Psi_1)=b(t)x(t-r)+X(t)X^{-1}(t_0)Dx_{t_0}+$$

$$\int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)\cdot[b(s)A(s)x(s-r)+f(s,x_s)]\mathrm{d}s,\qquad t\geq t_0,\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\bar{x}(t,t_0,\Psi_2)&=b(t)\bar{x}(t-r)+X(t)X^{-1}(t_0)D\bar{x}_{t_0}+\\&\int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)\cdot[b(s)A(s)\bar{x}(s-r)+f(s,\bar{x}_s)]\mathrm{d}s,\qquad t\geq t_0.\end{aligned}\tag{18}$$

于是,对于 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{K(1+b)}$,则当 $\|\Psi_1(t)-\Psi_2(t)\|<\delta(t\in[t_0-r,t_0])$ 时,必有 $\|x(t,t_0,\Psi_1)-\bar{x}(t,t_0,\Psi_2)\|<\varepsilon(t\geq t_0)$,否则必存在着 $t_1>t_0$ 使得

$$\|x(t,t_0,\Psi_1)-\bar{x}(t,t_0,\Psi_2)\|<\varepsilon,\qquad t_0<t<t_1,\tag{19}$$

且

$$\|x(t_1,t_0,\Psi_1)-\bar{x}(t_1,t_0,\Psi_2)\|=\varepsilon.\tag{20}$$

从而,由式(17)～(20)得

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\|x(t_1,t_0,\Psi_1)-\bar{x}(t_1,t_0,\Psi_2)\|\leq\\&\|X(t_1)X^{-1}(t_0)\|\cdot\|Dx_{t_0}-D\bar{x}_{t_0}\|+|b(t_1)|\cdot\|x(t_1-r)-\bar{x}(t_1-r)\|+\\&\int_{t_0}^{t_1}\|X(t_1)X^{-1}(s)\|\cdot[\|b(s)A(s)\|\cdot\|x(s-r)-\bar{x}(s-r)\|+\|f(s,x_s)-f(s,\bar{x}_s)\|]\mathrm{d}s\leq\\&\frac{d_2}{d_1}\cdot\frac{\varepsilon}{K}\exp\Big(\int_{t_0}^{t_1}a_1(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)+\varepsilon\Big[B+\frac{d_2}{d_1}\cdot\frac{1}{K}\Big(1-\exp\Big(\int_{t_0}^{t_1}a_1(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)\Big)\Big]=\\&\varepsilon\Big(B+\frac{d_2}{d_1}\cdot\frac{1}{K}\Big)<\varepsilon.\end{aligned}$$

这就发生了矛盾. 这个矛盾说明 $\|x(t,t_0,\Psi_1)-\bar{x}(t,t_0,\Psi_2)\|<\varepsilon(t\geq t_0)$. 因为 δ 与 t_0 无关,故方程(3)的任一解都是一致稳定的.

(Ⅱ) 推论 1 的证明. 由定理 1 可知方程(3)存在唯一的一致稳定的概周期解 $x(t)$,而 $x(t+T)$ 仍是概周期函数,且由推论的条件容易验证 $x(t+T)$ 也是方程(3)的解. 因此由方程(3)的概周期解的唯一性即知 $x(t)=x(t+T)(\forall t\in\mathbf{R})$,从而 $x(t)$ 是方程(3)的唯一的一致稳定的 T-周期解.

(Ⅲ) 定理 2 的证明. 利用引理 1 的(7)式、引理 2 及引理 3 的式(11),此定理的证明完全类似于定理 1 前部分的证明,此处证略.

(Ⅳ) 推论 2 的证明. 此推论的证明完全与推论 1 的证明类似,此处证明从略.

参　考　文　献

1　吉泽太朗,郑祖庥,陈纪鹏. 稳定性理论与周期解和概周期解的存在性[M]. 广西:广西人民出版社,1985. 150～195

2　林振声. 概周期微分方程与积分流形[M]. 上海:上海科学技术出版社,1986. 100～200

3　何崇佑. 概周期微分方程[M]. 北京:高等教育出版社,1992. 80～280

4　王全义. 概周期解的存在性、唯一性与稳定性[J]. 数学学报,1997,40(1):80～89

5　Wang Quanyi. The existence and uniqueness and stability of almost periodic solutions for functional differential equations with infinite delays[J]. Chin. Ann. of Math., 1997, 18B(2): 233～242

6　周宗福. 一类高维滞后型泛函微分方程的周期解[J]. 数学杂志,2002,22(4):423～430

7　Fink A M. Almost periodic differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1974. 125～127

The Almost Periodic Solutions to Neutral Type Functional Differential Equation with Time-Delay

Fang Congna[①]　　Wang Quanyi[②]

(①Dept. of Basic Courses, Jimei Univ., 361021, Xiamen, China; ②Dept. of Math., Huaqiao Univ., 362021, Quanzhou, China)

Abstract　A study is made on the almost periodic solutions to a class of neutral type functional differential equations with time-delay. By using fixed point theorem and exponential type dichotomy, the authors obtain unique existence of the almost periodic solutions and their stability.

Keywords　neutral type functional differential equation, almost periodic solution, existence, uniqueness, stability