文章编号　1000-5013(2004)03-0241-03

剩余蕴涵的模糊三Ⅰ方法的约束度分析

王　琼

(江苏工业学院信息科学系, 江苏 常州 213016)

摘要　由连续三角模导出的剩余蕴涵算子, 对模糊三Ⅰ算法的约束度问题进行研究. 在原有三Ⅰ方法的约束度理论的基础上, 利用三角模和蕴涵算子的性质, 讨论该类算子下三Ⅰ方法的约束度理论. 给出一般化的 α-三Ⅰ FMP 公式和 α-三Ⅰ FMT 公式.

关键词　模糊推理, 三Ⅰ算法, 约束度, 蕴涵算子, 剩余蕴涵

中图分类号　TP 273⁺.4; O 159　　文献标识码　A

1　问题的提出

在模糊推理的理论研究中, 最基本的模糊推理规则为 FMP(Fuzzy Modus Ponens) 规则, 其形式为

$$\left.\begin{array}{c} A \to B, \\ \underline{A^*} \\ B^* . \end{array}\right\} \tag{1}$$

在式(1)中, 已知: $A \to B$ 且给定 A^*, 求 B^*, 同时 $A, A^* \in F(X)$, $B, B^* \in F(Y)$, 即 A, A^* 和 B, B^* 分别是论域 X 和 Y 上的模糊集. 目前被广泛应用的求 B^* 的方法是 Zadeh 提出的复合推理方法 CRI. 王国俊教授针对 CRI 方法的一些缺陷和不足, 提出了一种比 CRI 方法更优的新的模糊推理方法——全蕴涵三Ⅰ方法, 它具有较好的逻辑基础. 模糊三Ⅰ方法的基础思想是要所求的 B^*, 它是 $F(Y)$ 中使得 $(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y))$, 对一切 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 都取得最大值的最小模糊集. 在文[1~4]工作的基础上, 文[5]提出了三Ⅰ方法支持度理论的一般化形式的优化问题. 对于 $\alpha \in [0, 1]$, 在已知的 $A \in F(X)$, $B \in F(Y)$ 和 $A^* \in F(X)$ (或 $B^* \in F(Y)$) 时, 寻求最优的 $B^* \in F(Y)$ (或 $A^* \in F(X)$). 它使得 $(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \geqslant \alpha$, 对一切 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 成立, 其中 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 分别表示 X 和 Y 上的模糊集全体. 然而对模糊控制系统进行模糊推理时, 需考虑上述支持度理论的反问题. 也就是说, 求最优的 $B^* \in F(Y)$ (或 $A^* \in F(X)$) 满足

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \leqslant \alpha. \tag{2}$$

本文采用剩余蕴涵对这一反问题进行探讨, 讨论三Ⅰ算法的约束度理论. 给出 α-三Ⅰ FMP 上确界与 α-三Ⅰ FMT 下确界的计算公式. 进而, 可以为实现新型模糊控制器的某些性能指标提供必要的理论依据. 这对模糊推理与模糊逻辑和模糊控制相结合具有重要而广泛的意义.

2　约束度理论

定义 1[6]　在 $[0, 1]$ 上, 给出二元函数 $T: [0, 1]^2 \to [0, 1]$. 若满足条件 $a, b, c, d \in [0, 1]$, $T(a, 1) = a$, $T(a, b) = T(b, a)$, $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$, $T(a, b) \leqslant T(c, d)$, $a \leqslant c, b \leqslant d$, 则称 T 为三角模若 $S: [0, 1]^2 \to [0, 1]$ 满足 $T(a, b) = T(b, a)$, $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$, $T(a, b) \leqslant T(c, d)$ 及 $S(0, a) = a$, 则称 S 为反三角模. 若三角模 T 及反三角模 S 满足 $T(1-a, 1-b) = 1-S(a, b)$, 称 T 和

收稿日期　2004-01-02

作者简介　王　琼(1981-), 女, 助教, 主要从事模糊控制与智能控制的研究. E-mail: toarea@sohu.com

S 是对偶的.

根据这个定义, 有 $T(1, y)= y$, ($\forall y\in[0, 1]$, $T(x, 0)= T(0, y)= 0$, ($\forall x, y\in[0, 1]$.

定理 1 (剩余蕴涵[6])设 T 是$[0, 1]$上连续的三角模, $a\to b= \sup\{c: T(a, c)\leqslant b\}$, 则且具有以下几个性质. 若 $a\leqslant b$, 则 $a\to b= 1$. $a\to(b\vee c)\geqslant(a\to b)\vee(a\to c)$. $(a\vee b)\to c\leqslant(a\to c)\wedge(b\to c)$. $a\to T(a, b)\geqslant b$. $T(a, a\to b)\leqslant b$.

α-三Ⅰ原则(FMP). 假设 X, Y 是非空集, $A\in F(X)$, $B\in F(Y)$和 $A^*\in F(X)$, 则 FMP 中的 B^* 是 $F(Y)$中使式(2)成立的最小模糊集. 称 B^* 为 FMP 的 α-解.

α-三Ⅰ原则(FMT). 假设 X, Y 是非空集, $A\in F(X)$, $B\in F(Y)$和 $B^*\in F(Y)$, 则 FMT 中的 A^* 是 $F(X)$中使式(2)成立的最大模糊集. 称 A^* 为 FMT 的 α-解.

定义 3 设 Z 是非空集, $\alpha\in[0, 1]A, B\in F(Z)$, 若 $\sup\{A(z)\to B(z)\mid z\in Z\}= \alpha$, 则称 A 对 B 的约束度为α, 记作 $\mathrm{rest}(A, B)= \alpha$.

显然, 式(2)成立当且仅当 $A\to B$ 对$A^*\to B^*$ 的约束度小于或等于 α. 当采用剩余蕴涵时, 对于 $\alpha\in[0, 1]$, $\mathrm{rest}(A, B)\leqslant\alpha$ 当且仅当$A\to B\leqslant\alpha$, 且 $A(z)> B(z)$ 对于任意 $z\in Z$ 成立. 约束度的一般性质, 如定理 2 所述.

定理 2 设 $\mathrm{rest}(A, B)= \alpha< 1$, $\mathrm{rest}(B, C)= \beta< 1$, 则 $\mathrm{rest}(A, C)\leqslant T(\alpha, \beta)$.

证明 由假设 $\mathrm{rest}(A, B)= \alpha< 1$, 知 $A(z)\to B(z)\leqslant\alpha$ 且$A(z)> B(z)$($\forall z\in Z$). 由定义有 $T(A(z), \alpha)\geqslant B(z)$. 类似由$\mathrm{rest}(B, C)= \beta< 1$, 有$T(B(z), \beta)\geqslant C(z)$且$B(z)> C(z)$($\forall z\in Z$). 因为$T(A(z), T(\alpha, \beta))= T(T(A(z), \alpha), \beta)\geqslant T(B(z), \beta)\geqslant C(z)$, 所以$\forall z\in Z$, $A(z)\to C(z)\leqslant T(\alpha, \beta)$且 $A(z)> B(z)> C(z)$. 因此, $\mathrm{rest}(A, C)\leqslant T(\alpha, \beta)$. 定理得证.

设 $A, B, C, A_i, B_i, C_i\in F(Z)(i\in I)$, 则有

定理 3 $\mathrm{rest}(\bigwedge_{i\in I}A_i, B)= \bigvee_{i\in I}\mathrm{rest}(A_i, B)$, $\mathrm{rest}(A, \bigvee_{i\in I}B_i)= \bigvee_{i\in I}\mathrm{rest}(A, B_i)$.

证明 $\bigvee_{i\in I}\mathrm{rest}(A_i, B)= \sup_{i\in I}\mathrm{rest}(A_i, B)= \sup_{i\in I}\sup\{A_i(z)\to B(z)\mid z\in Z\}= \sup_{i\in I}\sup\{A_i(z)\to B(z)\mid z\in Z\}= \sup\{\bigwedge_{i\in I}A_i(z)\to B(z)\mid z\in Z\}= \mathrm{rest}(\bigwedge_{i\in I}A_i, B)$. $\bigvee_{i\in I}\mathrm{rest}(A, B_i)= \sup_{i\in I}\mathrm{rest}(A, B_i)= \sup_{i\in I}\sup\{A_i(z)\to B_i(z)\mid z\in Z\}= \sup_{i\in I}\sup\{A(z)\to B_i(z)\mid z\in Z\}= \sup\{A(z)\to\bigvee_{i\in I}B_i(z)\mid z\in Z\}= \mathrm{rest}(A, \bigvee_{i\in I}B_i)$.

定理 4 $\mathrm{rest}(A, B\to C)= \mathrm{rest}(B, A\to C)$, $\mathrm{rest}(A, B\to C)= \mathrm{rest}(A, (1-C)\to(1-B))$.

证明 由约束度的定义可知, 只需证明 $a\to(b\to c)= b\to(a\to c)$. 又 $a\to(b\to c)= \sup\{t\mid T(a, t)\leqslant b\to c\}$, $b\to(a\to c)= \sup\{t\mid T(b, t)\leqslant a\to c\}$, 因为$T(T(a, b), t)= T(T(a, t), b)= T(T(b, t), a)\leqslant T(b\to c, b)\leqslant c$, 即$T(b, t)\leqslant a\to c$. 所以$T(a, t)\leqslant b\to c\Rightarrow T(b, t)\leqslant a\to c$. 同理可证其逆命题. 因此, $\mathrm{rest}(A, B\to C)= \mathrm{rest}(B, A\to C)$.

由约束度的定义可知, 只需要证明$b\to c\leqslant(1-c)\to(1-b)$. 因为$T(S(1-(b\to c), c), b\to c)= T(c, S(1-(b\to c), b\to c))\leqslant c$, $b\to c\leqslant S(1-(b\to c), c)\to c$, 所以 $b\geqslant S(1-(b\to c), c)$, 即 $T(b\to c, 1-c)\geqslant 1-b$. 因此就有 $b\to c\leqslant(1-c)\to(1-b)$, 这样就证明了定理. 直接由定理 3 和定理 4 就可以推出定理 5.

定理 5 $\mathrm{rest}(A, \bigwedge_{i\in I}B_i\to C)= \bigvee_{i\in I}\mathrm{rest}(A, B_i\to C)$, $\mathrm{rest}(A, B\to\bigvee_{i\in I}C_i)= \bigvee_{i\in I}\mathrm{rest}(A, B\to C_i)$.

3 三Ⅰ算法的 FMP 上确界和 FMT 下确界

对于约束度理论的情形, 在已知 A, B 和A^* (或 B^*)时, 使得式(2)成立的解 B^* (或 A^*)不一定存在. 进而, 相应的最优解也是不一定存在的. 但是, 在一定条件下式(2)的解是存在的.

定理 6 (α-三Ⅰ FMP 上确界算法)设 X, Y 是非空集, $A, A^*\in F(X)$, $B\in F(Y)$, $0< \alpha< 1$, 则式(2)存在全蕴涵三Ⅰ FMP α-解的充要条件是$T(A(x)\to B(y), A^*(x))\geqslant 1-\alpha$ 对一切$x\in X$ 和$y\in Y$ 成立. 在此条件下式(2)的全蕴涵三Ⅰ FMP α-解的上确界为

$$B^*(y)=T(\alpha,\inf_{x\in X}T(A^*(x),A(x)\to B(y)))(\forall y\in Y)$$

证明　由剩余蕴涵的性质可知,$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\leqslant\alpha$当且仅当$T(A(x)\to_T B(y),A^*(x))\to_T B^*(y)\leqslant\alpha$. 又由三角模$T$的性质有$T(1-B^*(y),\alpha)\leqslant\alpha$, 即$(1-\alpha)\to B^*(y)\geqslant\alpha$. 所以这就证明了$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y))\leqslant\alpha\Leftrightarrow T(A(x)\to B(y),A^*(x))\geqslant 1-\alpha$. 下面证明$B^*$是FMP α-解的上确界, 首先证明$B^*$是FMP α-解. 因为$B^*(y)\leqslant T(\alpha,T(A(x)\to_T B(y),A^*(x)))$, 即$T(A(x)\to_T B(y),A^*(x))\to_T B^*(y)\leqslant\alpha$. 所以,$(A(x)\to_T B(y))\to_T(A^*(x)\to_T B^*(y))\leqslant\alpha$成立, 即$B^*$是FMP的α-解. 若存在$y_0\in Y$, $C(y_0)>B^*(y_0)$, 那么由B^*的定义可知

$$C(y_0)>T(\alpha,T(A(x)\to B(y_0),A^*(x))),\alpha\to C(y_0)>T(A(x)\to B(y_0),A^*(x)).$$

所以,$(A(x)\to B(y_0))\to(A^*(x)\to C(y_0))>\alpha$, 即$C(y_0)$不是FMP α-解. 这就证明了$B^*$是FMP α-解的上确界.

定理7　即α-三Ⅰ FMT下确界算法. 设X, Y是非空集, $A\in F(X)$, B, $B^*\in F(Y)$, $0<\alpha<1$, 则式(2)存在全蕴涵三Ⅰ FMT α-解的充要条件是$S(1-A(x)\to B(y)),B^*(y))\leqslant\alpha$对一切$x\in X$和$y\in Y$成立. 在此条件下, 式(2)的全蕴涵三Ⅰ FMT α-解的下确界为

$$A^*(x)=S(\sup_{y\in Y}S(B^*(y),1-(A(x)\to B(y))),1-\alpha)(\forall x\in X).$$

证明　由剩余蕴涵的性质可知,$(A(x)\to_T B(y))\to_T(A^*(x)\to_T B^*(y))\leqslant\alpha$当且仅当$T(A(x)\to_T B(y),1-B^*(y))\to_T(1-A^*(x))\leqslant\alpha$. 又由三角模$T$的性质有$T(A^*(x),\alpha)\leqslant\alpha$, 即$(1-\alpha)\to_T(1-A^*(x))\geqslant\alpha$. 所以,$(A(x)\to_T B(y))\to_T(A^*(x)\to_T B^*(y))\leqslant\alpha$当且仅当$T(A(x)\to_T B(y),1-B^*(y))\geqslant 1-\alpha$, 即$S(1-(A(x)\to_T B(y)),B^*(y))\leqslant\alpha$. 首先证明$A^*(x)$是FMT α-解. 因为, $A^*(x)=S(\sup_{y\in Y}S(B^*(y),1-(A(x)\to_T B(y))),1-\alpha)\geqslant 1-T(T(1-B^*(y),A(x)\to_T B(y)),\alpha)$. 所以, $1-A^*(x)\leqslant T(T(A(x)\to_T B(y),\alpha),1-B^*(y))$, $A^*(x)\to_T B^*(y)\leqslant T(A(x)\to_T B(y),\alpha)$, 即$(A(x)\to_T B(y))\to_T(A^*(x)\to_T B^*(y))\leqslant\alpha$. 若存在$x_0\in X$, $C(x_0)<A^*(x_0)$, 那么$C(x_0)<1-T(T(1-B^*(y),A(x_0)\to_T B(y)),\alpha)$. 所以, $C(x_0)\to_T B^*(y)>T(A(x_0)\to_T B(y),\alpha)$, 即有$(A(x)\to_T B(y))\to_T(C(x)\to_T B^*(y))>\alpha$, C不是FMT的α-解. 这也就证明了$A^*(x)$是FMT的α-解的下确界.

参　考　文　献

1　Dubois D, Prade H, Lang J. Fuzzy sets in approximately reasoning[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40(2): 143~244

2　Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process[J]. IEEE Trans. Systems Man Cyber Net, 1973, 3(1): 28~44

3　Wang Guojun. On the logic foundations of FMP and FMT[J]. Int. J. Fuzzy Mathematics, 1997, 5(1): 229~250

4　李洪兴. 模糊控制的插值机理[J]. 中国科学(E辑), 1998, 28(3): 259~267

5　王国俊. 模糊推理的全蕴涵三Ⅰ算法[J]. 中国科学(E辑), 1999, 29(1): 43~53

6　张文修, 梁　怡. 不确定性推理原理[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1996. 57~76

Analysing Residual Implication-Based Restricting Degree of Fuzzy Triple I Method

Wang Qiong

(Dept. of Info. Sci., Jiangsu Polytechnic College, 213016, Changzhou, China)

Abstract　The restrieting degree of fuzzy triple I as a problem is studied on the basis of residual implication operators deriving from continuous triangle module. Starting from the restricting degree theory of triple I method existing already, the author discusses restricting degree theory of triple I method under implication operators by using properties of triangle module and implication operators; and gives also the general α-triple I formulae of FMP and FMT.

Keywords　fuzzy reasoning, triple I algorithm, restricting degree, residual implication